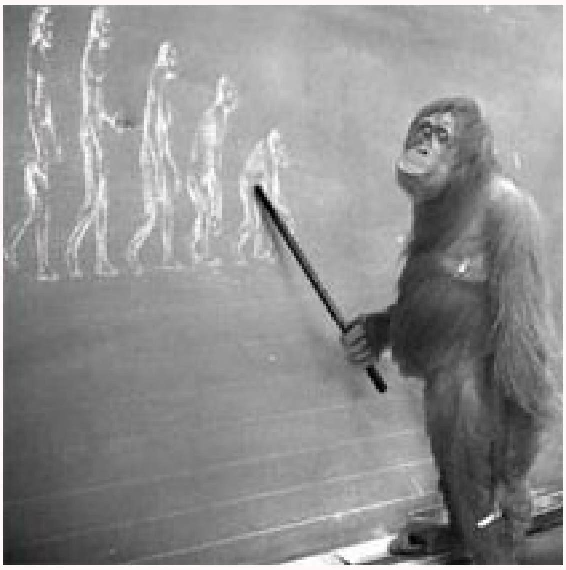
AVENTURE

7

Suites réelles usuelles



La nature est à maints égards *exponentielle* : de la division cellulaire à la propagation d'un virus, de la décomposition radioactive à la gestion des populations de cerfs,...Et pourtant les idées fausses sur ce domaine sont légion. Petite devinette : une algue verte double sa population chaque jour. Il faut 60 jours pour qu'elle recouvre la surface d'un lac. Au début il y a très peu d'algues. L'ingénieur des Eaux et Forêts chargé de la surveillance décide d'agir dès que les algues couvriront plus d'un quart de la surface du lac : quel jour va-t-il intervenir ? Si la moitié de la population terrestre migre vers Mars en 2050, combien d'années cela laissera de répit à la population restante avant une nouvelle sur-population mortelle ? Est-ce que la croissance de la population de la bactérie *streptococcus faecalis* dans un verre de lait est vraiment exponentielle (doublement chaque heure) ? Nous allons étudier ces problèmes conjointement avec M. Girard tout au long de l'année et la première étape consiste à étudier ce chapitre...

Au sommaire de ce chapitre

1 Le programme de BCPST

Le but de ce chapitre (qui n'est qu'une **première approche très sommaire** des suites) est d'étendre un peu l'ensembles des suites « *connues* » (??) et de développer les aptitudes au calcul sur ces suites ; le point de vue ici est algébrique.

— somme, produit, quotient de suites réelles.

— suites arithmétiques et géométriques. Terme général.

— Suites arithmético-géométriques.

— Suites vérifiant une relation du type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

2 Qu'est-ce qu'une suite numérique ?

C'est une suite... de nombres dont chaque membre porte un dossard numéroté.
Par exemple l'ensemble des multiples entiers positifs de 10 classés par ordre croissant est une suite (numérique [a]).
On peut la décrire de diverses façons :

— à l'aide d'une phrase comme nous venons de le faire ;

— en décrivant l'ensemble de ses éléments : l'ensemble des réels x tels qu'il existe un entier naturel n vérifiant $x = 10n$;

— en donnant l'expression d'un terme quelconque de la suite en fonction de son rang (son« numéro de dossard »). Ici, le terme de rang k est $10k$, quelque soit l'entier naturel non nul k ;

— en exprimant comment on obtient un terme en fonction du précédent. Ici, un terme quelconque est égal au terme précédent plus 10, sachant que le premier vaut 0. On dit qu'on définit ainsi la suite par une relation de *récurrence* ;

— etc.

a. comme on n'étudiera pas que celles-ci en prépa, il faudra garder cette distinction à l'esprit.

En fait, à chaque numéro de dossard correspond un seul nombre. On définit ainsi une fonction : *une suite est en fait un cas particulier de fonction qui est définit sur l'ensemble* $\mathbb{N}$ des numéros de dossard, enfin des entiers naturels je veux dire.

Définition 7-1

Suite numérique réelle
Une suite est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels ou sur une partie seulement de $\mathbb{N}$.
Si son ensemble image est $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$, c'est une suite numérique réelle.
Définir une suite réelle, c'est donc associer un nombre réel à tout élément d'une partie de $\mathbb{N}$.

Dans notre exemple précédent, appelons d cette suite. Alors on peut écrire :

$$d : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 10n \end{array}$$

Ainsi, le multiple numéro 3 est $d(3) = 10 \times 3 = 30$

Idée

Notation usuelle
Au lieu d'utiliser la notation habituelle $d(n)$ pour désigner l'image de n, on utilise souvent d_n.
Dans notre exemple, $d_n = 10n$, quelque soit l'entier naturel n.
La suite d est de *terme général* d_n. Au lieu de d, on désigne aussi la suite par $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou même plus simplement (d_n).
On appelle d_n le *terme d'indice* n ou encore le *terme de rang* n.

Danger

Il ne faudra pas confondre le *nombre* d_n avec la *suite* (d_n) qui est une fonction...
Toute confusion de notations entraînera des sanctions aux concours.

Exemple 7.1

Décrivez la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des entiers naturels pairs.

3 Suite dont le terme général est donné explicitement

En fait, cela veut dire que l'on connaît l'expression de u_n en fonction de n et que l'on peut donc calculer n'importe quel terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 7-2

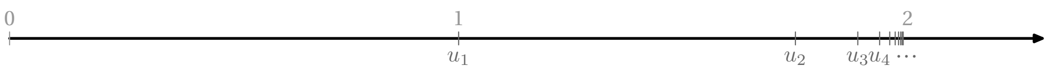
Suite définie explicitement
Soit D une partie de $\mathbb{N}$ et soit f une fonction définie sur n. Soit u une suite telle que $u_n = f(n)$ pour tout $n \in D$. On dit alors que la suite $(u_n)_{n\in D}$ est définie explicitement.

Exemple 7.2

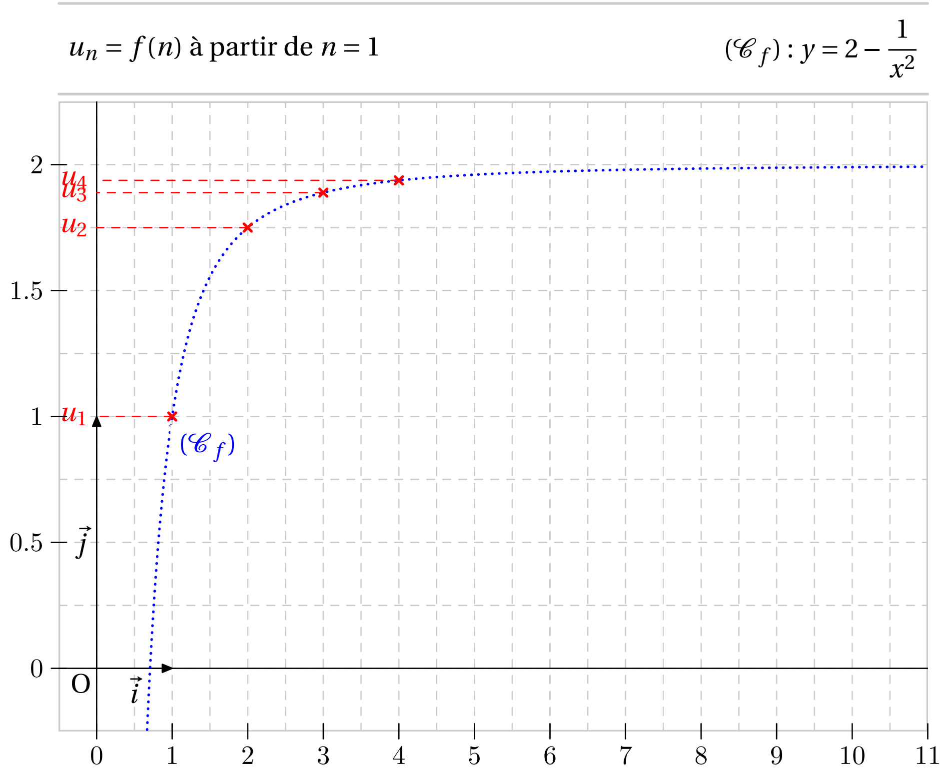
Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ par $u_n = 2 - \dfrac{1}{n^2}$.

On obtient par exemple $u_1 =$, $u_2 =$, $u_{10} =$
On peut même tracer sa représentation graphique. On peut le faire

— sur un axe :



— dans un repère du plan :



Danger

La représentation graphique de la suite n'est constituée que par les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses entières : il ne faut donc pas les relier mais laisser des petites croix isolées.

Rien de bien nouveau par rapport aux fonctions mais attendez la suite...

4 Suite définie par une relation de récurrence

Exemple 7.3

Il nous faut un point de départ : posons par exemple $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
Ensuite, il nous faut un petit algorithme, comme dans les dessins de maternelle...
Disons ici que chaque terme est égal à la somme des deux précédents. Calculez les 10 premiers termes de la suite.

$u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 =$, $u_3 =$,$u_4 =$,$u_5 =$
$u_6 =$,$u_7 =$,$u_8 =$,$u_9 =$
Pouvez-vous calculer le 137ᵉ terme de cette suite ?

Définition 7-3

Suite définie par une relation de récurrence
C'est une suite dont on connaît le(s) premier(s) terme(s) et dont un terme quelconque est défini en fonction des termes précédents.

Exemple 7.4

Soit s et t les suites définies par :

$$s : \begin{cases} s_0 = 1 \\ \text{pour tout entier } n \geqslant 1,\ s_n = 1 + \dfrac{1}{s_{n-1}} \end{cases} \qquad t : \begin{cases} t_0 = 1 \\ \text{pour tout entier } n \geqslant 1,\ t_n = \sqrt{1 + t_{n-1}} \end{cases}$$

Calculez les valeurs approchées à 10^{-4} près des 10 premiers termes de chaque suite à l'aide de **Python**.

5 Opérations sur les suites réelles

5 1 Somme de suites réelles

Définition 7-4

Somme de suites réelles

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On appelle somme des suites (u_n) et (v_n) la suite (w_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n + v_n$$

5 2 Produit de suites réelles

Définition 7-5

Produit de suites réelles

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On appelle produit des suites (u_n) et (v_n) la suite (w_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n \times v_n$$

5 3 Quotient de suites réelles

Définition 7-6

Quotient de suites réelles

Soit (u_n) une suite réelle quelconque et (v_n) une suites réelle ne s'annulant pas ($\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \neq 0$). On appelle quotient des suites (u_n) et (v_n) la suite (w_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \frac{u_n}{v_n}$$

6 Suites de référence

6 1 Suites arithmétiques

6 1 1 Définition

On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre.

Exemple 7.5

Votre mamie vous donne 2 euros 50 tous les ans le 25 décembre. Vous décidez de garder précieusement cet argent dans votre chaussette préférée en vous interdisant d'y toucher pendant les vingt-cinq ans à venir.
De quelle somme disposerez-vous après n années si $n \leqslant 25$?

Notons C_1 votre capital après un noël et plus généralement C_n votre capital après n noëls.
On a $C_1 = 2,5$ puis $C_2 = 5$, $C_3 = 7,5$, etc.
Avec un bon sens de l'observation, nous remarquons que

$$(\forall n \in [\![0, 25]\!])(C_n = 2,5 \times n)$$

Nous avons ainsi tout naturellement construit une *suite* de sommes d'argent qui est en fait une suite numérique de *terme général* $C_n = 2,5n$. C'est un cas particulier qui nous intéresse :

Définition 7-7

Suite arithmétique

Une suite réelle (u_n) est arithmétique si, et seulement si :

$$(\exists b \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = u_n + b)$$

On appelle b la *raison* de la suite.

Dans l'exemple 7.5 page précédente, si on appelle C_n le capital constitué après n années, $C_{n+1} = C_n + 2,5$ avec $C_0 = 0$: la suite $(C_n)_{n\in[\![0,25]\!]}$ est donc une suite arithmétique de raison .... et de premier terme ....

Idée

Comment montrer qu'une suite n'est pas arithmétique ?
Par exemple, considérons la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 + 1$.
Calculons les premiers termes : $u_0 = ...$, $u_1 = ...$, $u_2 = ...$
Calculons $u_1 - u_0 = ...$ et $u_2 - u_1 = ...$ Que pouvons-nous en conclure ?

Théorème 7-1

Unicité d'une suite arithmétique
Une suite arithmétique est définie de manière *unique* par la donnée :

— de son *premier terme*

— de sa *raison*

Il est très utile de savoir démontrer une unicité : faites-le avec la méthode habituelle.

6 1 2 Expression explicite du terme général

Observons les premiers termes d'une suite arithmétique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme a_0 et de raison r :

$$\begin{aligned}
a_0 &= & a_0 &= a_0 + 0 \cdot r\\
a_1 &= & a_0 + r &= a_0 + 1 \cdot r\\
a_2 &= & a_1 + r = (a_0 + r) + r &= a_0 + 2 \cdot r\\
a_3 &= & a_2 + r = (a_0 + 2r) + r &= a_0 + 3 \cdot r
\end{aligned}$$

Il semble se dégager que pour n'importe quel entier naturel n, on ait $a_n = a_0 + n \cdot r$
Vérifions que la suite de terme général $u_n = a_0 + n \cdot r$ est bien la suite (a_n) :

— son premier terme est $a_0 + 0 \cdot r = a_0$;

— étudions la différence de deux termes consécutifs quelconques. Soit p un entier quelconque. Calculons $u_{p+1} - u_p$.
$u_{p+1} - u_p = a_0 + (p+1)r - (a_0 + pr) =$

D'après le théorème 7-6 page 10, on a $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n = a_n)$. Conclusion :

Théorème 7-2

Expression explicite du terme général d'une suite arithmétique
Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de premier terme a_0 et de raison r si, et seulement si, pour tout entier naturel n,

$$a_n = a_0 + n \cdot r$$

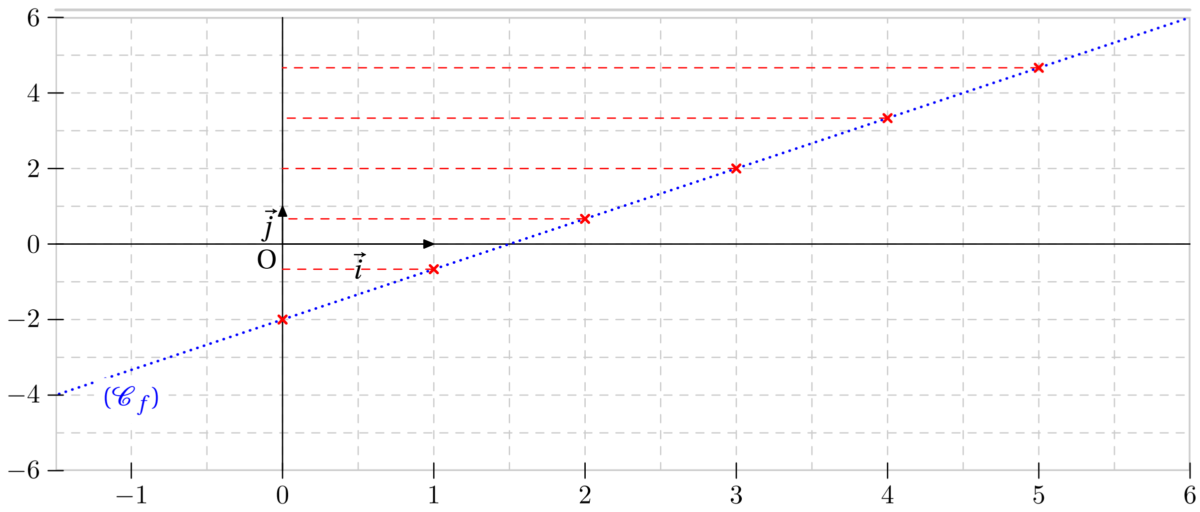
Idée

Expression du terme général en fonction d'un autre terme que celui de rang 0
Soit p un entier supérieur à un entier m.
$a_p = a_0 + p \cdot r$ et $a_m = a_0 + m \cdot r$. Alors $a_p - a_m = ...$
On obtient donc que $\boxed{a_p = a_n + (p-n)r}$

6 1 3 Représentation graphique

Avec les mêmes notations, $a_n = a_0 + n \cdot r = f(n)$ avec $f : x \mapsto a_0 + r \cdot x$. La fonction f est donc une fonction affine : sa représentation graphique est une droite de coefficient directeur r.

Suite arithmétique de raison $\frac{4}{3}$ et de premier terme -2



Théorème 7-3

Représentation graphique d'une suite arithmétique
Les points correspondant aux termes d'une suite arithmétique sont donc alignés sur une droite de coefficient directeur la raison et d'ordonnée à l'origine le premier terme.

6 1 4 Somme des premiers termes d'une suite arithmétique

6 1 4 a Somme des n premiers entiers naturels

On veut calculer $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$. La démonstration suivante a été donnée par le jeune Friedrich GAUSS à l'âge de 7 ans :

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
S_n = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & n-1 & + & n \\
S_n = & n & + & n-1 & + & n-2 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2S_n = & n+1 & + & n+1 & + & n+1 & + & \cdots & + & n+1 & + & n+1
\end{array}$$

Conclusion $2S_n = ...$ donc :
La démonstration attendue aux concours est plutôt celle par récurrence effectuée déjà maintes fois cette année.

Théorème 7-4

Somme des n premiers entiers naturels
La somme des entiers de 1 à n, notée $\sum_{k=1}^{n} k$, est égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$

6 1 4 b Somme des premiers termes d'une suite arithmétique

Avec les notations habituelles, nous voulons calculer $T_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.
$T_n = a_0 + a_0 + r + a_0 + 2r + a_0 + 3r + \cdots + a_0 + nr$
Combien de fois apparaît a_0 dans la somme ?
On peut d'autre part factoriser par r.

Théorème 7-5

Somme des premiers termes d'une suite arithmétique
Étant donné une suite arithmétique a de raison r

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \text{nombre de termes} \times \text{moyenne des extrêmes} = \frac{(n+1)(a_0 + a_n)}{2}$$

6 2 Suites géométriques

Nous irons plus vite ici : les preuves seront faites sur la page en regard de celle-ci dans votre classeur bien ordonné.

6 2 1 Définition

Définition 7-8

Suite géométrique
Une suite réelle (g_n) est géométrique si, et seulement si :

$$(\exists q \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(g_{n+1} = q \times g_n)$$

On appelle q la raison de la suite.

Théorème 7-6

Unicité d'une suite géométrique
Une suite géométrique est définie de manière *unique* par la donnée :

— de son *premier terme*

— de sa *raison*

6 2 2 Expression explicite du terme général

Théorème 7-7

Expression explicite du terme général d'une suite géométrique
Une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de premier terme g_0 et de raison q si, et seulement si, pour tout entier naturel n,

$$g_n = g_0 \times q^n$$

et de manière plus générale :

$$g_n = g_p \times q^{n-p}$$

6 2 3 Somme des premiers termes d'une suite géométrique

Théorème 7-8

Somme des premiers termes d'une suite géométrique
Si $q \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} g_k = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}} = g_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1-q}$

6 3 Suites arithmético-géométriques

Définition 7-9

Suite arithmético-géométrique
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmético-géométrique** lorsqu'il existe deux réels $a \neq 1$ et b tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = a \times u_n + b.$$

Théorème 7-9

Terme général d'une suite arithmético-géométrique
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique qui vérifie $u_{n+1} = a \times u_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Alors, pour tous entiers n et p tels que $p \leqslant n$,

$$u_n = a^{n-p}(u_p - c) + c \text{ avec } c = \frac{b}{1-a}.$$

Démonstration : étudier $(u_n - c)$

À retenir

Si on oublie la valeur de c, on peut la retrouver facilement en remarquant que c'est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $x = ax + b$ (quand « $u_{n+1} = u_n$ »...bizarre...).

Recherche 7.1

$u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -2u_n + 3$. Donner l'expression de u_n en fonction de n.

6 4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 7-10

Suite récurrente linéaire d'ordre 2

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **récurrente linéaire d'ordre 2** ou **récurrente linéaire double** lorsqu'il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ tels que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_{n+2}=a\times u_{n+1}+b\times u_n.$$

On associe à ce type de suite son **équation caractéristique** :

$$q^2=a\times q+b \tag{7.1}$$

Théorème 7-10

Étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2

On suppose que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=a\times u_{n+1}+b\times u_n$, et on note Δ le discriminant de (7.1).

— Si $\Delta>0$, (7.1) admet deux solutions distinctes réelles q_1 et q_2 et $\exists!(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\alpha q_1^n+\beta q_2^n.$$

— Si $\Delta=0$, (7.1) admet une unique solution réelle q et $\exists!(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=(\alpha n+\beta)q^n.$$

— Si $\Delta<0$, (7.1) admet deux solutions complexes conjuguées z_1 et z_2. On pose $z_1=\rho e^{i\theta}$, $\exists!(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\rho^n(\alpha\cos(n\theta)+\beta\sin(n\theta)).$$

Remarque 1

Les réels α et β sont déterminés à partir des conditions initiales.

Remarque 2

Dans le cas $\Delta<0$, le choix de z_1 ou z_2 n'a pas d'importance : le résultat final sera le même après la prise en compte des conditions initiales.

Recherche 7.2

$u_0=0$, $u_1=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$.
Vous devriez trouver :

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Recherche 7.3

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=1$, $u_1=\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=-u_{n+1}-u_n$.
Exprimer son terme général.

Exercices

Légende

- Objectif : Début de 1ère
  - connaître les définitions des suites arithmétiques et géométriques ;
  - savoir calculer un terme connaissant raison et un autre terme ;
  - savoir calculer la raison connaissant plusieurs termes ;
  - savoir calculer la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique ;
  - maîtriser le symbolisme des suites : notation avec indice, symbole sigma.
- Objectif : Bac
  - modéliser une situation pour aboutir à une suite arithmétique ou géométrique ;
  - étudier certaines suites en utilisant une suite arithmétique ou géométrique auxiliaire introduite par l'énoncé ;
  - résoudre des problèmes liés aux suites en mettant en œuvre des outils algébriques moyennement complexes ;
  - savoir utiliser Python ;
  - mettre au point ou savoir exécuter des algorithmes de calcul de termes de suites.
- Objectif : BCPST
  - résoudre des problèmes liés aux suites en mettant en œuvre des outils algébriques complexes ;
  - faire preuve d'initiative ;
  - avoir de l'imagination ;
  - réfléchir seul(e) ;
  - chercher, se tromper, recommencer, laisser reposer et reprendre plus tard ;
  - ne pas avoir peur de l'inconnu ;
  - aborder un problème inconnu en essayant de se ramener à un problème connu.

Les énoncés

Recherche 7.4 — Suites et notations

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = 2n^2 - 1$.

Que valent pour n fixé u_{n+2}, $u_n + 2$, u_{2n}, u_n^2 ?

Former une relation de récurrence vérifiée par u_n.

Recherche 7.5

$(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite arithmétique de raison $r = 2$ telle que $u_4 = 30$.

1. Calculer u_0.
2. Calculer u_9.
3. Calculer la somme S_{10} des 10 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Recherche 7.6

Démontrez qu'il existe une suite arithmétique et une seule telle que les termes d'indice 10 et 19 soient 15 et 42.

Recherche 7.7

Une usine d'armement fabrique des prothèses de cerveaux.
La machine fonctionne 7 jours sur 7 durant le mois de juin. La production est de 2 500 cerveaux le 31 mai.
À partir du 1er juin, la production augmente de 50 cerveaux par jour.
Pour un client, on stocke la production du 11 juin au 24 juin inclus.
On nomme u_n la production le jour n du mois de juin.

1. Établir la formule donnant u_n en fonction de n et calculer la production du 24 juin.

2. Calculer le nombre de cerveaux stockés pour le client.

Recherche 7.8

$(V_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite arithmétique telle que $V_5 = 7$ et $V_9 = 1$.

1. Déterminer la raison et le premier terme de cette suite.
2. Donner son terme général.
3. Calculer $S = V_{53} + V_{54} + V_{55} + \cdots + V_{100}$.

Recherche 7.9

Soit la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $U_n = 2n + 7$.

1. La suite (U_n) est-elle arithmétique ?
2. Calculer U_{100}.
3. Calculer la somme $S = U_0 + U_1 + \cdots + U_{99} + U_{100}$.

Recherche 7.10

La suite géométrique (u_n) est définie par les termes $u_3 = 2{,}4$ et $u_{10} = 307{,}2$. Déterminer la raison q, le premier terme u_0 et l'expression de u_n en fonction de n.

Recherche 7.11 **SAT Practice Test**

The bacteria population in a day-old wad of chewing gum doubles every 3 hours. If there are 100 bacteria at 12 :00 noon on Friday, how many bacteria will be present at midnight of the same day ?

1. 200
2. 300
3. 800
4. 1600

Recherche 7.12 **SAT Practice Test**

Author A, an extraordinarily fast writer who zips through a chapter a day, gets paid \$100 for her first chapter, \$200 for her second, \$300 for her third, and so on. Author B, also a member of the chapter-a-day club, gets paid \$1 for his first chapter, \$2 for his second, \$4 for his third, \$8 for his fourth, and so on. On the 12th day,

1. Author A is paid \$76 more.
2. Author B is paid \$24 more.
3. Author A is paid \$1,178 more.
4. Author B is paid \$848 more.

Recherche 7.13

Bernard Crazyoff dispose de £50 000 000 qu'il place à intérêts composés [b] au taux annuel de 6%. On note K_0 le capital de départ et K_n la somme dont disposera Bernard au bout de n années de placement.

1. Calculer K_1 et K_2.
2. Exprimer K_{n+1} en fonction de K_n.
3. Quelle est la nature de la suite (K_n) ?
4. En déduire l'expression de K_n en fonction de n.
5. De quelle somme disposera-t-il s'il laisse son argent placé pendant 10 ans sans krach financier ?

Recherche 7.14 **AS Maths**

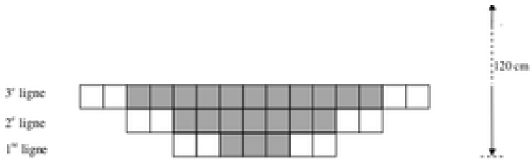
For each of the following sequences, find an inductive definition and a formula.

b. Les intérêts sont dits « composés » lorsqu'à la fin de chaque année les intérêts produits sont ajoutés au capital. Ils produisent alors aux-mêmes des intérêts au cours des années suivantes.

1. 1, 5, 9, 13,... **2.** 1,-2,4,-8,16,... **3.** 16000,4000,1000,250,... **4.** 1,8,27,64,...

Recherche 7.15 **Bac Pro B3 2013**

On réalise un motif n carreaux gris et blancs pour décorer une salle de bains. La hauteur du motif est 120 cm. On néglige l'épaisseur des joints. Les carreaux gris sont commercialisés en boîte de 10 carreaux de dimension 5×5 (en centimètres).
On a représenté ci-dessous les trois premières lignes du motif à réaliser.



L'objectif de cet exercice est de déterminer le nombre de boîtes de carreaux gris nécessaires pour réaliser le motif.
On note u_1 le nombre de carreaux gris de la première ligne, u_2 le nombre de carreaux gris de la deuxième ligne, etc.

1. Démontrer que le suite (u_n) formée par le nombre de carreaux gris de chaque ligne est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
2. Calculer le nombre de carreaux gris utilisés pour réaliser la dernière ligne du motif.
3. Calculer le nombre minimum de boîtes de carreaux gris nécessaires pour réaliser le motif.

Recherche 7.16 **BAC 1L 2012**

Le tableau ci-dessous regroupe des estimations de la population mondiale données par l'ONU (Organisation des Nations Unies).

Année	Population mondiale (en milliards d'habitants)
1965	3,34
1970	3,70
1975	4,07
1980	4,44
1985	4,84
1990	5,28
1995	5,69
2000	6,09
2005	6,50
2010	6,84

Partie 1 - Étude préliminaire

1. Quel est le pourcentage d'augmentation de la population mondiale entre 1965 et 1970 ? Arrondir le résultat à 0,1 %.
2. En considérant que la population mondiale a augmenté de 10,8 % entre 1960 et 1965, calculer la population mondiale en 1960. Arrondir le résultat à $0,01$ milliard d'habitants.

Partie 2 - Modélisation à l'aide d'une suite géométrique
On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 3,34$ et de raison $q = 1,108$.

1. Donner des valeurs approchées de u_1 et u_2 à $0,01$ près.
2. Exprimer u_n en fonction de l'entier n.
3. On utilise la suite (u_n) pour modéliser la population mondiale en considérant que, pour n un entier naturel, u_n correspond à la population mondiale en milliards d'habitants en $1965 + 5n$.
   a. Calculer u_9. Que représente cette valeur ?

b. Cette modélisation vous paraît-elle acceptable ?

Partie 3 - Modélisation à l'aide d'une suite arithmétique

On considère la suite arithmétique (v_n) de premier terme $v_0 = 3,34$ et de raison $r = 0,37$.
On utilise cette suite pour modéliser la population mondiale en considérant que pour n un entier naturel, v_n correspond à la population mondiale en milliards d'habitants en $1965 + 5n$.

1. Calculer v_9. À quelle valeur du tableau doit-on comparer cette valeur pour tester la validité de cette nouvelle modélisation ?
2. À l'aide de cette suite, quelle population peut-on prévoir en 2030 ?

Recherche 7.17

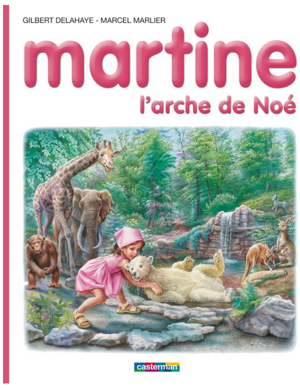
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$. Démontrer que la suite $(u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique et en déduire le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Recherche 7.18 Trouver le terme général : cas basiques

Dans chacun des cas suivants exprimer le terme général de la suite (u_n) en fonction de n.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -2u_n$ et $u_0 = 3$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (-2) + u_n$ et $u_0 = 1$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2$ et $u_0 = 4$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n$ et $u_0 = u_1 = 1$.
5. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$ et $u_0 = 2$, $u_1 = 4$.
6. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ et $u_0 = u_1 = 1$.

Recherche 7.19 C'était quand le déluge ?



En 1950 il y avait 2 536 431 milliers d'humains sur Terre. En 1960 ils étaient 3 034 950 milliers et en 1970 nous étions 3 700 437 milliers.
Si l'on considère que la croissance de la population a toujours été géométrique et sachant que la Terre a été repeuplée après le déluge par les trois fils de Noé et de sa femme Martine : Sem, Cham et Japhet...ainsi que leurs épouses respectives dont on ne connait plus le nom, c'était quand le déluge (la Bible indique que c'était 2348 ans avant la naissance du petit Jésus) ?

Recherche 7.20 Trouver le terme général : cas plus difficiles

Dans chacun des cas suivants exprimer le terme général de la suite (u_n) en fonction de n.

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique et $u_2 = 8$; $u_5 = 1$.
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et $u_5 = 8$; $u_8 = -1$.
3. $u_5 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = -4$.
4. $u_8 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - u_{n+1} = 4$.
5. $u_0 = -1$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $2u_{n-1} = -u_{n+1}$.
6. $u_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2^n$.
7. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2$.

Recherche 7.21 Une suite auxiliaire

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 2}{u_n + 2}$.

1. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $n \geqslant 3 \Rightarrow u_n > 1$.
2. En déduire que l'on peut définir une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$.
3. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.

4. En déduire u_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n$.

Recherche 7.22 Cheers

n camarades se retrouvent pour travailler sur de nouveaux problèmes mathématiques en buvant de l'hydromel et, comme de coutume, frappent avec leur verre ceux des autres buveurs. Combien de « Tchin » entend-on ?

Recherche 7.23 Ni l'un ni l'autre

Soit (u_n) la suite défiie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$. On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
2. Calculer en fonction de n la somme $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.
3. Calculez u_{100}.

Recherche 7.24

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 \text{ donné.} \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$.

1. Que peut-on dire de (u_n) si $u_0 = 3$?
2. Dans la suite de l'exercice, on choisit $u_0 = 2$.
   a. Calculer u_1 et u_2.
   b. (u_n) est elle une suite arithmétique ? géométrique ?
3. On considère la suite (z_n) définie pour tout n entier naturel par : $z_n = u_n - 3$
   a. Calculer z_0, z_1 et z_2.
   b. Démontrer que la suite (z_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$.
   c. Exprimer z_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4. Calculer u_{24}.

Recherche 7.25

Soit (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3^n - n + 5$.

1. Cette suite est-elle arithmétique ? Géométrique ?
2. Calculer la somme des $n+1$ premiers termes de cette suite en fonction de n.

Recherche 7.26 BAC 1L 2012

Une personne souhaitant acheter une voiture s'engage dans un prêt bancaire. Elle emprunte pour cela au premier mars 2011 un capital C de 10 000 euros auprès de sa banque. Le tableau ci-dessous permet de visualiser le capital restant dû par cette personne au début de chaque mois ; il tient compte à la fois de la somme empruntée (ici, 10 000 euros), de la mensualité et du taux d'emprunt bancaire. Un tel tableau s'appelle un tableau de remboursement. Nous n'avons représenté ici que les sommes restant dues jusqu'au premier juillet 2011.
Toutes les sommes sont exprimées en euros et arrondies au centime le plus proche.

Dates	Capital restant dû (en euros)
1 mars 2011	10 000
1 avril 2011	9 700
1 mai 2011	9 397
1 juin 2011	9 090,97
1 juillet 2011	8 781,88

Ainsi, au premier mars 2011, l'emprunteur doit la somme de 10 000 euros : c'est celle qu'il a empruntée.

Au premier avril 2011, après un premier versement, il lui reste à payer 9 700 euros pour rembourser totalement son crédit. Au premier mai 2011, cette somme n'est plus que de 9 397 euros, et ainsi de suite.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite des capitaux restant dus au cours du temps. Pour cela, nous notons u_n le capital restant dû au mois n, avec pour convention que le mois de mars 2011 est le mois 0. Avec cette convention d'écriture, nous avons donc :
$u_0 = 10\,000$, $u_1 = 9\,700$, $u_2 = 9\,397$, etc.

Dans tout cet exercice, les résultats des calculs seront arrondis au centième.

Partie 1

Dans cette partie, nous évaluons la pertinence de modéliser la suite (u_n) par une suite arithmétique.

1. Déterminer une fonction **Python** qui renvoie la liste des n premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer une fonction qui teste si la progression des n premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.

Partie 2

Nous envisageons maintenant une modélisation géométrique de la suite (u_n).

1. Comment, à l'aide de **Python**, mettre en évidence l'éventuelle progression gémétrique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. On note (v_n) la suite géométrique de raison $0,97$ et de premier terme 10 000. Déterminer la liste des différences entre les n premiers termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Pour n entier naturel, exprimer v_n en fonction de n.
4. Au premier mars 2012, le capital restant dû s'élèvera à 6 195,25 euros. La modélisation géométrique de la suite (u_n) vous parait-elle convenir ?

Partie 3

Dans cette dernière partie de l'exercice 1, nous envisageons un autre modèle, dit arithmético-géométrique.
Pour n entier naturel, on pose $w_n = u_n - 40\,000$.

1. Déterminer la liste des n premiers termes de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide de **Python**.
2. Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de la suite (w_n) ? Donner des arguments appuyant cette conjecture.
3. On suppose que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 1,01.
   a. Pour n entier naturel, exprimer w_n en fonction de n.
   b. Pour n entier naturel, déduire de l'égalité $w_n = u_n - 40\,000$ et de la question précédente l'expression de u_n en fonction de n.
   c. Quand le prêt arrivera-t-il à échéance ? Combien de mensualités aura versé l'emprunteur ?

Recherche 7.27 **Cambrige AS level 2010**

The ninth term of an arithmetic progression is 22 and the sum of the first 4 terms is 49.

1. Find the first term of the progression and the common difference.
2. The nth term of the progression is 46. Find the value of n.

Recherche 7.28 **Cambridge AS level 2012**

The first term of an arithmetic progressin is 61 and the second term is 57. The sum of the first n terms is n. Find the value of the positive integer n.

Recherche 7.29 **Cambridge AS level 2013**

In an arithmetic progression the sum of the first ten terms is 400 and the sum of the next ten terms is 1000. Find the common difference and the first term.

Recherche 7.30 **Cambridge AS level 2014**

An arithmetic progression has a first term 7. The nth term is 84 and the $(3n)$th term is 245. Find the value of n.

Recherche 7.31

Imaginez des énoncez d'exercices similaires à la série anglaise mais concernant les suites géométriques.

Recherche 7.32 **Tercero de la ESO (3e espagnole)**

Hallar el número de términos y la razón de una progresión geométrica cuyo primer término es 4, el último 62500 y la suma de todos sus términos 78124.

Recherche 7.33 **Tercero de la ESO**

Halla la suma de los siete primeros términos de la progresión cuyos tres primeros términos son :

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Recherche 7.34 **Tercero de la ESO**

La suma de los 5 términos que forman una progresión geométrica es $(b^2+1)(b+1)$ y la razón es b. ¿Cuánto vale el primer término ?

Recherche 7.35 **Tercero de la ESO**

En una progresión geométrica de cinco términos, el último es doble del tercero y el producto de todos ellos es igual a $4\sqrt{2}$. Hallar todos los términos de la progresión.

Recherche 7.36 **Tercero de la ESO**

En una bodega hay dos enormes depósitos de vino A y B. Todos los días se sacan ciertas cantidades de vino de cada uno de los depósitos. Del depósito A se extrajeron 5 litros el primer día, 10 el segundo, 20 el tercero y así sucesivamente. Del depósito B se extrajeron 2 litros el primer día, 4 el segundo, 8 el tercero y así sucesivamente. El último día se extrajeron del depósito A 96 litros más que del depósito B. ¿Cuántos litros de vino se extrajeron en total de cada depósito y durante cuántos días ?

Recherche 7.37 **Tercero de la ESO**

Radio Macuto : A las 9 de la mañana una persona cuenta un secreto a tres amigos con la condición de que no se lo cuenten absolutamente a nadie. A las 9'30 horas de la mañana cada uno de esos tres amigos se lo ha contado a otros tres con la misma condición. A las 10 de la mañana cada uno de estos amigos se lo ha contado a otros tres y así sucesivamente cada media hora. Suponiendo que se ha tenido la inmensa suerte de que a nadie se lo han contado por dos vías diferentes, ¿cuánta gente estaría enterada del secreto a las 4 de la tarde ?

Recherche 7.38 **Tercero de la ESO**

Demostrar que si los números a, b y c están en progresión geométrica, entonces la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ no tiene soluciones reales y que la ecuación $ax^2+2bx+c=0$ tiene una raíz real doble.

Recherche 7.39 **Bac S 2012**

1. On considère l'algorithme suivant :

Les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul N.

Traitement
Affecter à U la valeur 0
Pour k allant de 0 à $N-1$

Affecter à U la valeur $3U - 2k + 3$
Fin pour

Sortie
Afficher U

Quel est l'affichage en sortie lorsque $N = 3$? Donner un programme **Python** traduisant cet algorithme.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.
Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.
Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

3. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.

4. Soit p un entier naturel non nul.
Proposer une fonction **Python** qui, pour une valeur de p donnée en paramètre, renvoie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant 10^p$.

Recherche 7.40 — Bac S 2013

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{9}{6 - v_n} \end{cases}$$

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.
Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse. Le traduire en **Python**.

Algorithme N° 1

Variables :
v est un réel
i et n sont des entiers naturels

Début de l'algorithme :
Lire n
v prend la valeur 1
Pour i variant de 1 à n faire
  v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
Fin pour
Afficher v

Fin algorithme

Algorithme N° 2

Variables :
v est un réel
i et n sont des entiers naturels

Début de l'algorithme :
Lire n
Pour i variant de 1 à n faire
v prend la valeur 1
  Afficher v
v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
Fin pour

Fin algorithme

Algorithme N° 3

Variables :
v est un réel
i et n sont des entiers naturels

Début de l'algorithme :
Lire n
v prend la valeur 1
Pour i variant de 1 à n faire
  Afficher v
v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
Fin pour
Afficher v
Fin algorithme

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par

$$w_n = \frac{1}{v_n - 3}.$$

a. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$

b. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.

Recherche 7.41 **Bac S Londres 2012**

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{nu_n + 1}{2(n+1)}$.

Partie A - Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme u_9 de la suite, un élève propose l'algorithme ci-contre.
Il a oublié de compléter deux lignes.

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	Tant que $n < 9$ Affecter à u la valeur ... Affecter à n la valeur ... Fin Tant que
Sortie	Afficher la variable u

1. Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension. Traduire en **Python**.
2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9 ? Le traduire en **Python**.

Partie B - Étude mathématique

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = nu_n - 1$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
2. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_n = \dfrac{1 + (0,5)^n}{n}$.

Partie C - Retour à l'algorithmique

En s'inspirant de la partie A, écrire une fonction **Python** permettant de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n < 10^{-p}$ pour tout entier natuel p donné.

Recherche 7.42 **Bac ES 2016**

En janvier 2016, une personne se décide à acheter un scooter coûtant 5 700 euros sans apport personnel. Le vendeur lui propose un crédit à la consommation d'un montant de 5 700 euros, au taux mensuel de 1,5 %. Par ailleurs, la mensualité fixée à 300 euros est versée par l'emprunteur à l'organisme de crédit le 25 de chaque mois. Ainsi, le capital restant dû augmente de 1,5 % puis baisse de 300 euros.
Le premier versement a lieu le 25 février 2016.
On note u_n le capital restant dû en euros juste après la n-ième mensualité (n entier naturel non nul). On convient que $u_0 = 5\,700$.
Les résultats seront donnés sous forme approchée à $0,01$ près si nécessaire.

1. **a.** Démontrer que u_1, capital restant dû au 26 février 2016 juste après la première mensualité, est de 5 485,50 euros.

   b. Calculer u_2.
2. On admet que la suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = 1,015u_n - 300$$

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un nombre réel
Traitement :	Affecter à u la valeur 5 700
	Affecter à n la valeur 0
	Tant que $u > 4\,500$ faire
	$\quad$ u prend la valeur $1,015 \times u - 300$
	$\quad$ n prend la valeur $n + 1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en ajoutant autant de colonnes que nécessaires entre la deuxième et la dernière colonne.

Valeur de u	5700	$\cdots$	
Valeur de n	0	$\cdots$	
$u > 4500$ (vrai ou faux)	vrai	$\cdots$	faux
$\cdots$			

b. Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ?
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice. Traduire en **Python**.

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20\,000$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+1} = 1,015 \times v_n$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :
$u_n = 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^n$.

4. À l'aide de la réponse précédente, répondre aux questions suivantes :

a. Démontrer qu'une valeur approchée du capital restant dû par l'emprunteur au 26 avril 2017 est 2 121,68 euros.

b. Déterminer le nombre de mensualités nécessaires pour rembourser intégralement le prêt.

c. Quel sera le montant de la dernière mensualité ?

d. Lorsque la personne aura terminé de rembourser son crédit à la consommation, quel sera le coût total de son achat ?

Recherche 7.43 — Bac ES 2016

Un loueur de voitures dispose au 1er mars 2015 d'un total de 10 000 voitures pour l'Europe.
Afin d'entretenir son parc, il décide de revendre, au 1er mars de chaque année, 25 % de son parc automobile et d'acheter 3 000 voitures neuves.

On modélise le nombre de voitures de l'agence à l'aide d'une suite :
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de voitures présentes dans le parc automobile au 1er mars de l'année $2015 + n$.
On a donc $u_0 = 10\,000$.

1. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,75u_n + 3\,000$.

2. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par

$$v_n = u_n - 12\,000.$$

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75. Préciser son premier terme.

b. Exprimer v_n en fonction de n.

c. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_n = 12\,000 - 2\,000 \times 0,75^n$.

d. Que pouvez-vous conjecturer sur le nombre de voitures que comptera le parc automobile de ce loueur au bout d'un grand nombre d'années ?

3. On aimerait déterminer l'année à partir de laquelle le parc automobile comptera au moins 11 950 voitures.

a. Recopier l'algorithme suivant et compléter les pointillés afin qu'il permette de répondre au problème posé.

Initialisation	U prend la valeur 10 000
	N prend la valeur 0
Traitement	Tant que ...
	N prend la valeur ...
	U prend la valeur ...
	Fin Tant que
Sortie	Afficher ...

b. À l'aide de **Python**, déterminer l'année recherchée.

Recherche 7.44

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3.$$

1. Écrire une fonction **Python** qui prend un entier n en paramètre et renvoie u_n.

2. Déterminer des réels a et b tels que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n + an + b$$

soit géométrique.

3. en déduire l'expression de u_n en fonction de n pour $n \geqslant 0$.

Recherche 7.45

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, nu_n + u_{n-1} - \dfrac{2}{(n-1)!} = 0 \end{cases}$

1. Étudier la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par $v_n = n!u_n$.

2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

3. Écrire un programme **Python** qui détermine le plus petit entier n tel que l'écart à la limite soit inférieur à 10^{-4}.

Recherche 7.46 — Bac S 2016

On souhaite stériliser une boîte de conserve.
Pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25\,°\text{C}$ et on la place dans un four à température constante $T_F = 100\,°\text{C}$.
La stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85 °C.
Pour n entier naturel, on note T_n la température en degré Celsius de la boîte au bout de n minutes. On a donc $T_0 = 25$.
Pour n non nul, la valeur T_n est calculée puis affichée par l'algorithme suivant :

Initialisation :	T prend la valeur 25
Traitement :	Demander la valeur de n Pour i allant de 1 à n faire T prend la valeur $0,85 \times T + 15$ Fin Pour
Sortie :	Afficher T

1. Déterminer la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes.
   Arrondir à l'unité.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.
3. Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-elle ?

Recherche 7.47 **Bac S 2016**

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.
La société met en place le dispositif industriel suivant.
Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.
L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.
On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante :

$$u_0 = 1\,000 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 1,2u_n - 100.$$

1. **a.** Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé.
   On précisera en particulier ce que représente u_n.

   b. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de **Python**, donner la réponse à ce problème.

   c. On peut également utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème posé dans la question précédente.
   Recopier et compléter cet algorithme. Le traduire en **Python**.

Variables	u et n sont des nombres

Traitement	u prend la valeur 1 000
	n prend la valeur 0
	Tant que .... faire
	    u prend la valeur ....
	    n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que

Sortie	Afficher ....

2. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

   b. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

Recherche 7.48

Pour chacune des suites suivantes, exprimer le terme général de la suite en fonction de n :

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = 2u_n - 1$.
2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_{n+1} = -v_n + 2$.

Recherche 7.49

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et, pour tout entier n, $\quad u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$
Déterminer le terme général de (u_n).

Introduire une nouvelle suite pour mettre en évidence une relation de récurrence usuelle

Recherche 7.50

On considère la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4} \end{cases}$.

1. Soit $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f : x \mapsto \frac{3x+2}{x+4}$$

   Démontrer que $f([0,1[) \subseteq [0,1[$.
2. Démontrer que la suite est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n < 1$.
3. Écrire une fonction **Python** qui prend un entier n en paramètre et renvoie u_n.
4. Démontrer que la suite de terme général $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$ est géométrique.
5. En déduire le terme général de (v_n) puis celui de (u_n).
6. Écrire une fonction **Python** qui prend un entier naturel p en paramètre et renvoie le plus petit entier n tel que $|u_n - 1| < 10^{-p}$.

Recherche 7.51 Des suites récurrentes linéaires couplées

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$, $v_0 = \dfrac{1}{3}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= &u_n &+ &3v_n \\ v_{n+1} &= &2u_n &+ &2v_n \end{cases}$$

1. Exprimer pour $n \in \mathbb{N}$, u_{n+2} en fonction de u_{n+1}, u_n et v_n. En déduire que $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n$
2. En déduire une expression en fonction de n de u_n puis de v_n.

Recherche 7.52 Une histoire de méthane

Une bactérie, dans des conditions favorables, se multiplie par deux tous les deux heures. Elle produit également, dans les mêmes conditions, 10^{-7} grammes de méthane par heure.

Une bactérie initiale est placée dans des conditions favorables. Quelle quantité de méthane sera produite au bout de n heures ?

Recherche 7.53 Une histoire de lapins

Le modèle de Fibonacci de reproductions de lapins n'est pas réaliste, car il ne tient pas compte de la mortalité des lapins, on va donc essayer de l'améliorer.
L'espérance de vie moyenne d'un lapin étant d'environ 2 ans, on considère alors un cycle de vie de deux ans. On ne s'intéresse qu'au nombre de femelles. On répartit celles-ci en deux classes d'âge :

— les jeunes femelles dont l'âge varie de 0 à 1 an ;

— les femelles adultes dont l'âge varie de 1 an à 2 ans.

La maturité sexuelle des femelles étant atteinte à peu près à 6 mois, on suppose qu'une jeune femelle donne naissance en moyenne à deux femelles par an (moyenne réalisée sur les jeunes femelles de 0 à 1 an, ayant atteint leur maturité sexuelle ou non). Une femelle adulte donne elle naissance à six femelles par an en moyenne. Par ailleurs, on observe que 50% des jeunes lapines n'atteignent pas l'âge adulte. On note a_n le nombre de femelles adultes, et j_n le nombre de jeunes femelles (n étant le nombre d'années).

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $j_{n+1} = 6a_n + 2j_n$ et $a_{n+1} = 0,5j_n$.
2. En déduire une relation de récurrence d'ordre deux vérifiée par a_n puis a_n en fonction de n en considérant que l'on a initialement un couple adulte.

Recherche 7.54 Cuarto de la ESO (2nde)

Comprueba que, en una progresión geométrica con un número impar de términos, n, donde a_c es el término central, la suma de los términos se puede hallar mediante la fórmula

$$S_n = a_c \times \frac{r^n - 1}{r^{\frac{n-1}{2}} \times (r-1)}$$

Recherche 7.55 Cuarto de la ESO (2nde)

Si los cuatro primeros términos de una progresión geométrica son 1, 3, 9 y 27, comprueba que el producto de los n primeros términos es igual a $3^{\frac{n^2-n}{2}}$

Recherche 7.56 1ère russe...

Показать, что

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + \cdots + \frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{1}{a_1a_{n+1}}$$

где $a_1, a_2, \dots a_{n+1}, \dots$ ненулевые члены **арифметической** прогрессии.
Quelle est la question ? Quelle est la réponse ?
Simplifiez alors l'expression suivante, la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ étant encore arithmétique

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}$$

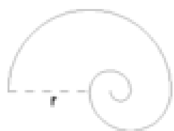
Recherche 7.57 1ère russe

Пусть S_n, S_{2n} и S_{3n} - соответственно суммы первых n, $2n$ и $3n$ членов **геометрической** прогрессии. Доказать равенство

$$S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$$

Recherche 7.58 Abitur

An einen Halbkreis mit dem Radius r wird ein halb so großer Halbkreis angefügt, daran wieder ein halb so großer usw., so daß eine Spirale entsteht (Bild).



1. Berechne den Grenzwert der Länge der Spirale.
2. Wie weit ist das Zentrum der Spirale von ihrem Anfangspunkt entfernt ?

Recherche 7.59 Flocon de Von Koch

On part d'un triangle équilatéral T_0 de côté a. Chacun des côtés de ce triangle est également partagé en trois segments de mêmes longueurs.
Pour chacun des côtés, le tiers central est remplacé par les deux côtés d'un triangle équilatéral extérieur à T_0 et dont le troisiéme côté serait le tiers manquant. On obtient un polygone T_1.

On construit de la même manière T_2, T_3, etc.

1. Calculez les périmètres p_0, p_1, etc. de ces polygones. Quelle relation existe-t-il entre p_{n+1} et p_n ?
2. Prenons $a = 1$. Donner le plus petit entier n tel que $p - n \geqslant 3000000$.
3. Que pensez-vous de l'aire de ces polygones ?

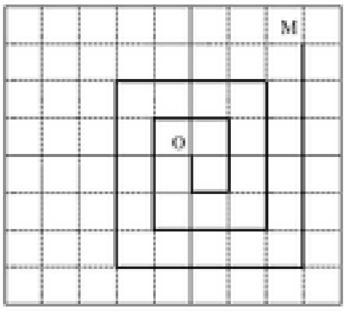
Recherche 7.60 **Plan de remboursement d'un emprunt**

Lorsqu'on emprunte de l'argent à mensualités constantes, un plan de remboursement indique, suivant le capital emprunté C, le taux d'intérêt mensuel t et le montant des remboursements M, le capital R_n, en £ restant dû au bout de n mensualités.

1. Établir une relation de récurrence définissant R_{n+1} en fonction de t, R_n et M.
2. Quelle est la nature de la suite (R_n) ?
3. En déduire l'expression de R_n en fonction de C, M, n et t.
4. On veut complètement rembourser l'emprunt au bout de N mensualités. Déterminer N en fonction de M, t et C.
5. Joe Max voit une publicité sur son iPad : « Empruntez £3000 à un taux de 0,5% mensuel et ne remboursez que £50 par mois, vive le crédit, vivre c'est consommer ». Il se demande alors , s'il fait cet emprunt, au bout de combien de temps aura-t-il fini de le rembourser ? Qu'en pensez-vous ?
6. Maintenant, Joe Max veut rembourser sur deux ans ces £3000. Quel sera le montant de ses mensualités ?

Recherche 7.61 **Olympiades académiques...plutôt costaud !**

Le plan muni d'un repère orthonormal d'origine O (unité 1 cm), est quadrillé de droites parallèles aux axes de coordonnées et passant par tous les points à coordonnées entières du plan. Sur ce quadrillage, on construit, en partant du point O vers le bas, une ligne brisée en forme de « spirale » qui « tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre », conformément au dessin ci-dessous.



Pour tout point M à coordonnées entières, on note $\ell(M)$
la longueur de la portion de « spirale » qui va du point O au point M.

1. Soit A un point de l'axe des abscisses tel que $OA = 5$. Déterminer les valeurs possibles de $\ell(A)$.
2. Soit B le point de coordonnées $(2005; 2006)$. Déterminer $\ell(B)$.
3. Déterminer les coordonnées du point C tel que $\ell(C) = 2006$.
4. La « spirale » passe-t-elle effectivement par tous les points à coordonnées entières du plan ?