Mathématiques

2021-2022

Mis à jour le 3 mai 2023 à 08:31

« Un cours, d'abord on le prépare, ensuite on l'improvise » - Henri LEBESGUE

Les aventures mathématiques de Kermaths en BCPST1

Prépa EXTERNAT CHAVAGNES

Guillaume CONNAN

AVENTURE

24

Probabilités sur un espace fini

« Le nom seul de calcul des probabilités est un paradoxe : la probabilité, opposée à la certitude, c'est ce qu'on ne sait pas, et comment peut-on calculer ce que l'on ne connaît pas ? »
Henri Poincaré - La Science et l'hypothèse (1908)

« [La théorie des probabilités] donne les aperçus les plus sûrs qui puissent nous guider dans nos jugements. [...] Il n'est point de science plus digne de nos méditations, et qu'il soit plus utile de faire entrer dans le système de l'instruction publique. »
Pierre Simon de Laplace - Essai philosophique sur les probabilités (rédigé de 1795 à 1825)

« The true logic of this world lies in the calculus of probabilities »
James C. Maxwell - The Scientific Letters and Papers of James C. Maxwell, Vol. 1, 1846-1862

« We cannot predict whether a given photon will arrive at A or B. All we can predict is that out of 100 photons that come down, an average of 4 will be reflected by the front surface. Does this mean that physics, a science of great exactitude, has been reduced to calculating only the probability of an event, and not predicting exactly what will happen ? Yes. That's a retreat, but that's the way it is : Nature permits us to calculate only probabilities. Yet science has not collapsed. »

Richard P. Feynman - The strange theory of light and matter (1985)

1 Avant la formalisation

Essayons, grâce à notre petite expérience probabiliste acquise au lycée, de dégager les grandes lignes de ce que pourrait être une théorie formalisée, dans l'esprit de ce qui s'est fait en géométrie depuis des siècles.
Lors de l'étude des probabilités, on est amené à effectuer une **expérience aléatoire**, c'est-à-dire un processus dont on ne peut prévoir à l'avance le résultat qui peut donner des résultats différents même si l'on répète l'expérience dans des conditions qui semblent identiques.
Nous allons considérer par la suite le lancement d'un dé cubique équilibré et tout et tout.
On doit d'abord connaître l'ensemble des résultats possibles : c'est l'**univers** que nous noterons par la suite Ω.
Par exemple, si je lance une fois le dé, $\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$.
Si je lance deux fois de suite le dé et que je note dans l'ordre le numéro des faces, j'obtiens dans ce cas $\Omega_2 = \{11,12,13,...,66\}$
Si je lance les dés jusqu'à obtenir deux 6 à la suite, le nombre de lancers n'est maintenant pas fixé à l'avance et l'univers est a priori infini mais en demeurant discret : chaque évènement peut en effet être « numéroté ». Plus rigoureusement, Ω_3 peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$: $\Omega_3 = \{1366, 3546213466, 55236221466, ...\}$.
Il faut maintenant étudier la notion d'« évènement [a] ». Disons dans un premier temps qu'il s'agit d'une assertion vérifiable relativement au résultat d'une expérience aléatoire. Il est donc « associé » à un sous-ensemble (une partie) de Ω. Un élément de Ω sera associé à un **évènement élémentaire**.
Reprenons le deuxième exemple. Voici quelques évènements :

— « Obtenir deux fois 3 » : $E_a = \{33\}$. C'est un évènement élémentaire ;
— « Ne pas obtenir deux fois 3 » : $E_b = \Omega_2 \setminus E_a \subseteq \Omega_2$;
— « Obtenir deux faces dont la somme des numéros fait 11 » : $E_c = \{56, 65\} \subseteq \Omega_2$;
— « Obtenir deux faces dont le numéro est inférieur à 7 » : $E_d = \Omega_2$. Il s'agit donc de l'**évènement certain** ;
— « Obtenir deux faces dont la somme des numéros fait 37 » : $E_e = \varnothing$. Il s'agit cette fois de l'**évènement impossible**.

On comprend que l'univers lui-même et l'ensemble vide sont des évènements. On voudrait que la réunion et l'intersection d'évènements soit encore un évènement et que le complémentaire de la partie associée à un évènement définisse encore un évènement : les mathématiciens (français...) disent alors que l'ensemble de tous ces évènements forment une **tribu**. Dans le reste du monde, on parle plutôt de σ-algèbre de Boole : les ensembles concernés vérifient en effet certaines propriétés *algébriques*.
Il reste enfin à définir un moyen de **mesurer** les probabilités : c'est une sorte de degré de certitude correspondant à une échelle graduée de 0 à 1, 0 correspondant au degré de l'évènement impossible et 1 au degré de l'évènement certain. Il est important de comprendre que ce degré de certitude est donné **a priori** et permet donc de prévoir l'issue de l'expérience avant de la réaliser.
Il faudrait que cette mesure assure une cohérence entre les évènements et les degrés.
Par exemple, si $A \subseteq B$, on aimerait que $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$. On aimerait également que l'union de deux parties de l'univers se « transforme » en somme de leur degré de certitude, mais on « sent » bien que cela ne pourra être vrai que si les évènements sont totalement **incompatibles** : $A \cap B = \varnothing \rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$. On retrouve ici cette notion algébrique de « transport » des opérations : la notion d'*isomorphisme*.

Considérons pour illustrer ces dernières notions le premier exemple du lancer unique d'un dé.
Notre univers Ω_1 contient 6 éléments et prenons comme tribu naturellement associée les $2^6 = 64$ parties de Ω_1 qui forment l'ensemble $\mathfrak{P}(\Omega_1)$.
Imposons pour notre modèle que la mesure du degré de certitude ne dépende pas des numéros des faces mais uniquement du cardinal de la partie considérée : chacun des six évènements élémentaires aura donc la même probabilité : $\mathbb{P}(\text{« 1 »}) = \mathbb{P}(\text{« 2 »}) = \cdots = \mathbb{P}(\text{« 6 »}) = \frac{1}{6}$.

a. Depuis 1990, l'Académie française préconise de mettre un accent grave au deuxième e d'événement qui doit donc s'écrire évènement...

La probabilité d'obtenir un numéro pair sera donc, sachant que l'évènement est associé à $A = \{2, 4, 6\}$: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\text{« 2 »}) + \mathbb{P}(\text{« 4 »}) + \mathbb{P}(\text{« 6 »}) = \frac{1}{2}$.
Mais si le dé est truqué ? Si l'univers est infini ? S'il n'est pas dénombrable ?
Il est temps de définir clairement et rigoureusement les notions afin de ne pas dire de bêtises...

2 Expérience aléatoire

2 1 Étude de situation

Définition 24-1

Expérience aléatoire, univers
Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat n'est pas connu à l'avance. On appelle **événement élémentaire** une issue d'une expérience aléatoire. L'ensemble de tous les événements élémentaires est noté Ω et est appelé **l'univers** de l'expérience.

Définition 24-2

Événement
Soit Ω un univers fini. Un **événement** est un élément de $\mathfrak{P}(\Omega)$.

À retenir

Dans le cas d'un univers fini, un événement est donc un sous-ensemble de Ω.

Expérience 1 On lance un dé cubique dont les faces sont des numéros de 1 à 6.

— $\Omega =$
— $A =$ « obtenir un 6 » donne la partie de Ω :
— $B =$ « obtenir un nombre pair » donne la partie de Ω :

Expérience 2 On lance deux dés cubiques, un rouge et un noir.

— $\Omega =$
— $A =$ « obtenir un double 6 » donne la partie de Ω :
— $B =$ « obtenir un double » donne la partie de Ω :
— $C =$ « obtenir au moins un 6 » donne la partie de Ω :

Expérience 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance une pièce n fois, avec la convention que « 1 » représente « pile » et « 0 » « face ».

— $\Omega =$
— $A =$ « n'obtenir que des piles » donne la partie de Ω :
— $B =$ « obtenir un pile au second lancer » donne la partie de Ω :
— $C =$ « obtenir au moins un pile » donne la partie de Ω :

Expérience 4 Soit $(n, N) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On effectue n tirages successifs avec remise d'une boule, dans une urne de N boules numérotées de 1 à N.

— $\Omega =$
— Un représentant de Ω est
— Par exemple
— $A =$ « ne jamais obtenir la boule N » donne la partie de Ω :
— $B =$ « toujours tirer le même numéro » donne la partie de Ω :

Expérience 5 Soit $(n, N) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On effectue n tirages successifs sans remise d'une boule, dans une urne de N boules numérotées de 1 à N (dans ce cas, $n \leqslant N$).

— $\Omega =$
— Un représentant de Ω est
— Par exemple

Expérience 6 Soit $(n, N) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On effectue un tirage de n boules prises simultanément dans une urne de N boules numérotées de 1 à N (dans ce cas, $n \leqslant N$).

— $\Omega =$
— Un représentant de Ω est
— Par exemple

Définition 24-3

Événement impossible, certain
Soit Ω un univers fini. Un événement qui n'est jamais réalisé s'appelle un **événement impossible**, on le note $\varnothing$. Un événement qui est toujours réalisé est un **événement certain**, on le note Ω.

2 2 Événements

Vocabulaire des événements	Vocabulaire des ensembles	Notation
événement élémentaire	singleton	$\{\omega\}$
événement contraire	complémentaire	$\overline{A} = \Omega \setminus A$
événement impossible	ensemble vide	$\varnothing$
les événements A et B sont réalisés	on est dans l'intersection de A et B	$A \cap B$
les événements A ou B sont réalisés	on est dans la réunion de A et B	$A \cup B$
les événements A et B sont incompatibles	les ensembles A et B sont disjoints	$A \cap B = \varnothing$
l'événement A implique l'événement B	l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B	$A \subset B$

Exemple 24.1

Si $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une famille d'événements dans un univers fini :

1. $\bigcup\limits_{i \in [\![1,n]\!]} A_i$ correspond à l'événement :
2. $\bigcap\limits_{i \in [\![1,n]\!]} A_i$ correspond à l'événement :
3. $\overline{\bigcup\limits_{i \in [\![1,n]\!]} A_i} =$ correspond à l'événement :
4. $\overline{\bigcap\limits_{i \in [\![1,n]\!]} A_i} =$ correspond à l'événement :
5. $\bigcup\limits_{i \in [\![1,n]\!]} (B \cap A_i) =$ correspond à l'événement :
6. $\bigcap\limits_{i \in [\![1,n]\!]} (B \cup A_i) =$ correspond à l'événement :

2 3 Système complet d'événements

Définition 24-4

Système complet d'événements
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Ω un univers fini et $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathfrak{P}(\Omega)^n$. On dit que $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est un **système complet d'événements** de Ω lorsque :

— les événements A_i sont deux à deux incompatibles : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$.
— les événements A_i recouvrent l'espace : $\bigcup\limits_{i \in [\![1,n]\!]} A_i = \Omega$.

Remarque 1

De manière évidente,
— $(\{\omega\})_{\omega\in\Omega}$ est un système complet d'événements de Ω.
— Si $A \subset \Omega$ alors $\left(A, \overline{A}\right)$ est un système complet d'événements de Ω.

Exemple 24.2

Déterminer plusieurs systèmes complets d'événements pour l'univers Ω de l'expérience 1.

Théorème 24-1

Décomposition d'un événement sur un système complet d'événements
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Ω un univers fini et $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ un système complet d'événements de Ω. Tout événement $B \in \mathfrak{P}(\Omega)$ peut se décomposer comme $B = \bigcup\limits_{i\in[\![1,n]\!]} (B \cap A_i)$, où les événements $B \cap A_i$ sont incompatibles deux à deux.

définition d'un système complet d'événements et distributivité...

3 Espace probabilisable - Espace probabilisé

Dans ce chapitre, Ω est un ensemble fini et on note $\mathscr{T} = \mathfrak{P}(\Omega)$.

Définition 24-5

Axiomes de КОЛМОГОРОВ
On appelle **mesure de probabilité** (ou probabilité tout court) une application $\mathbb{P}$ définie sur $\mathscr{T}$ vérifiant :

1. $\forall A \in \mathscr{T},\ \mathbb{P}(A) \in [0, 1]$;
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
3. $\forall (A, B) \in \mathscr{T} \times \mathscr{T},\ A \cap B = \varnothing \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

On dit alors que $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ est un **espace probabilisé**.

Vous pouvez vérifier que le couple $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$ avec $\Omega = \left\{1, 2, 3, 4, 5, 6\right\}$ muni de l'application :

$$\mathbb{P} : \begin{array}{rcl} \mathfrak{P}(\Omega) & \to & [0, 1] \\ A & \mapsto & \frac{\#A}{6} \end{array}$$

définit un espace probabilisé.
Pour l'axiome 3, on se souviendra de la formule du crible.

Comme Ω est finie, il existe une certaine famille finie I d'entiers telle que $\Omega = \bigcup\limits_{i\in I}\{\omega_i\}$ et pour tout évènement A de $\mathscr{T}$, il existe une famille $J \subseteq I$ telle que $A = \bigcup\limits_{j\in J}\{\omega_j\}$.

Alors, par application itérée du troisième axiome :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j\in J}\{\omega_j\}\right) = \sum_{j\in J} \mathbb{P}\left(\{\omega_j\}\right)$$

Remarque 2

Ainsi la donnée des valeurs prises par $\mathbb{P}$ sur les évènements élémentaires suffit à caractériser $\mathbb{P}$ sur $\mathscr{T}$.

Définition 24-6

Équiprobabilité

Dans le cas où Ω est fini et si tous les évènements élémentaires ont la même probabilité (on dit qu'il y a **équiprobabilité**), alors :

$$\mathbb{P}(\omega_1) = \mathbb{P}(\omega_2) = \cdots = \mathbb{P}(\omega_{\#\Omega}) = \frac{1}{\#\Omega}$$

Dans ce cas, $\mathbb{P}$ est appelée **probabilité uniforme** sur Ω.

Exemple 24.3

Une urne contient $n \in \mathbb{N}^*$ boules identiques numérotées de 1 à n. On en tire une au hasard : la probabilité que ce soit la boule numéro $i \in [\![1, n]\!]$ est alors $\dfrac{1}{\#\left([\![1, n]\!]\right)} = \dfrac{1}{n}$.

Théorème 24-2

Soit Ω un univers fini, et $A \in \mathscr{T}$. Si on a équiprobabilité, alors

$$\mathbb{P}(A) = \qquad\qquad .$$

Exemple 24.4

On lance deux dés équilibrés de couleurs différentes (un noir et un rouge), quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 6 ?

Danger

Attention ! **Toute probabilité n'est pas uniforme**...Votre smartphone sonne : quelle est la probabilité que cela soit Kermaths qui vous invite à dîner ? $\mathscr{T}$ contient deux évènements en plus de l'évènement certain et de l'évènement impossible : « c'est Kermaths » et « ce n'est pas Kermaths ». Le rapport entre cas favorables et cas possibles est bien $\frac{1}{2}$ et pourtant...

Théorème 24-3

Principales propriétés

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. La probabilité $\mathbb{P}$ vérifie :

1. $\mathbb{P}\left(\complement_\Omega A\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
2. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$;
3. $\forall (A, B) \in \mathscr{T} \times \mathscr{T},\ A \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$;
4. $\forall (A, B) \in \mathscr{T} \times \mathscr{T},\ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ (cas particulier de la formule du crible de POINCARÉ).

Dans la suite, quand il n'y aura pas ambiguïté, on notera $\complement_\Omega A$ par $\overline{A}$.

Recherche 24.1

Formule de Poincaré : cas de trois évènements

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_1, A_2, A_3) \in \mathscr{T}^3$. Alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

formules d'additivité et de distributivité...

Recherche 24.2

Une classe contient 30 élèves, qui partiquent tous un ou plusieurs sports. On sait que 25 élèves pratiquent le rugby, 12 le cricket et 8 le hurling. Par ailleurs, 8 élèves pratiquent à la fois le cricket et le rugby, 6 à la fois le hurling et le rugby et 2 à la fois le cricket et le hurling.

On choisit un élève aléatoirement. Quelle est la probabilité qu'il pratique les trois sports ?

Théorème 24-4

Croissance de P

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. P est une application croissante (au sens de l'inclusion) :

$$\forall (A, B) \in \mathscr{T}^2, \quad A \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B).$$

Soit $(A, B) \in \mathscr{T}^2$, on suppose que $A \subset B$...

Recherche 24.3

On effectue une succession de pile ou face. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose A_n l'événement « il y a au moins trois pile dans les n premiers lancers » et $u_n = \mathbb{P}(A_n)$. Montrer que la suite u est convergente.

Théorème 24-5

Lien entre probabilité et système complet d'événements

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $n \in \mathbb{N}^*$. Si $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements de Ω, alors

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = 1.$$

Il suffit d'utiliser successivement les caractéristiques du système complet d'événements et l'additivité de P...

Théorème 24-6

Théorème des probabilités totales (version 1)

Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système complet d'évènements, alors :

$$\forall E \in \mathscr{T}, \ \mathbb{P}(E) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E \cap A_i)$$

4 Probabilités conditionnelles

Dans toute cette section on travail dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$.

4 1 Un exemple pour comprendre

Considérons l'expérience simplissime consistant à lancer deux fois un dé à six faces. L'univers Ω est donc constitué de l'ensemble des couples (i, j), avec i et j appartenant à l'ensemble $[\![1, 6]\!]$: il y a donc 36 éléments dans Ω. Intéressons nous à la somme des deux chiffres et soit A l'événement « le total fait neuf ». On prendra $\mathscr{T} = \mathscr{P}(\Omega)$.

$$A = \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\}$$

donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Soit B l'événement : « on obtient 3 au premier lancer », alors

$$B = \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$$

donc

$$\mathbb{P}(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Jusqu'ici, tout roule. Posons-nous maintenant le problème suivant : sachant que B est réalisé, i.e. que l'on obtient 3 au premier lancer, quelle est la probabilité que le total fasse 9 ? On ne considère plus tous les éléments de Ω. Il semble alors nécessaire de définir un nouvel univers (notre nouvel ensemble des possibles) :

$$\Omega' = \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\} = \Omega \cap B$$

Puisque l'univers change, la probabilité aussi. L'événement A' « le total fait neuf » dans ce nouveau modèle s'écrit

$$A' = \{(3,6)\} = A \cap B$$

et donc

$$\mathbb{P}'(A') = \frac{1}{6} = \frac{\text{nombre d'éléments de } A \cap B}{\text{nombre d'éléments de } B} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

4 2 Définition

Cela nous incite à poser la définition suivante :

Définition 24-7

Probabilité conditionnelle

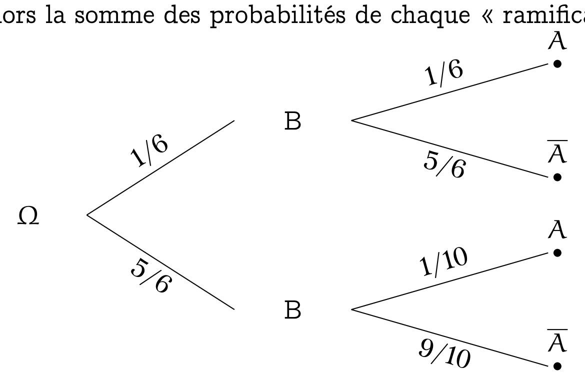
Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé muni d'une probabilité $\mathbb{P}$, avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$. **La probabilité de A sachant B** est définie par

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

On parle de *probabilité* conditionnelle. Mais est-ce bien une probabilité ? C'est-à-dire est-ce que $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P}_B)$ est un espace probabilisé ? D'après la définition 24-5 page 7, il y a trois conditions à vérifier : faites-le !

4 3 Arbre

Reprenons l'exemple de la section 24.4.1 page précédente en répondant aux mêmes questions à l'aide d'un arbre *pondéré*, c'est à dire un arbre dont chaque branche est marquée de la probabilité (du poids) correspondant.
Alors la somme des probabilités de chaque « ramification » est égale à 1.



À l'aide de la formule des probabilités totales, il est aisé d'obtenir les résultats suivant :

1. **Calcul de $\mathbb{P}(A)$**
   B et $\overline{B}$ forment une partition. D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(\overline{B} \cap A) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(A \mid B) + \mathbb{P}(\overline{B}) \times \mathbb{P}(A \mid \overline{B})$$

$$\mathbb{P}(A) = \tfrac{1}{6} \times \tfrac{1}{6} + \tfrac{5}{6} \times \tfrac{1}{10} = \tfrac{1}{9}$$

2. **Calcul de $\mathbb{P}(\overline{A})$**
   B et $\overline{B}$ forment une partition. D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(B \cap \overline{A}) + \mathbb{P}(\overline{B} \cap \overline{A}) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(\overline{A} \mid B) + \mathbb{P}(\overline{B}) \times \mathbb{P}(\overline{A} \mid \overline{B})$$

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \tfrac{1}{6} \times \tfrac{5}{6} + \tfrac{5}{6} \times \tfrac{9}{10} = \tfrac{8}{9}$$

3. **Probabilités conditionnelles**

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{4} \qquad \mathbb{P}_{\overline{A}}(B) = \frac{\mathbb{P}(B \cap \overline{A})}{\mathbb{P}(\overline{A})} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{8}{9}} = \frac{5}{32}$$

$$\mathbb{P}_A(\overline{B}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{B} \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{9}} = \frac{3}{4} \qquad \mathbb{P}_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{B} \cap \overline{A})}{\mathbb{P}(\overline{A})} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{8}{9}} = \frac{27}{32}$$

4 4 Formule des probabilités composées

Théorème 24-7

Formule des probabilités composées

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille d'événements de $\mathscr{T}$ telle que $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n).$$

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On pose $H(n)$:
« $\forall (A_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathscr{T}^n$ tel que $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\dots\mathbb{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

»

— $\forall A_1 \in \mathscr{T}$, $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1)$, donc $H(1)$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $H(n)$ est vraie.
Soit $(A_i)_{i\in[\![1,n+1]\!]} \in \mathscr{T}^{n+1}$ tel que $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$. On applique $H(n)$ à $(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, (A_n \cap A_{n+1}))$ (c'est possible car par croissance de $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \geqslant \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$. Cette probabilité est donc bien non nulle) :
$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap (A_n \cap A_{n+1})) =$
. $\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\dots\mathbb{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n \cap A_{n+1})$.
Or par définition de la probabilité conditionnelle, comme $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$,

$$\mathbb{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)\mathbb{P}_{(A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})\cap A_n}(A_{n+1}).$$

En remplaçant cette formule dans l'expression précédente, on trouve que $H(n+1)$ est vraie.

D'où le résultat.
On aurait également pu appliquer $H(n)$ à $((A_1 \cap A_2), A_3 \dots, A_n, A_{n+1})$.

Exemple 24.5

On tire trois fois de suite, sans remise, dans une urne composée de 7 boules blanches et 6 rouges. Pour $i \in [\![1,3]\!]$, on pose $B_i =$« le i-ème tirage donne une boule blanche » et $R_i =$« le i-ème tirage donne une boule rouge ». Calculer $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap R_3)$.

Théorème 24-8

Formule des probabilités totales, deuxième version

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $I \subset \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de Ω tel que pour tout $i \in I$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$. Alors pour tout $B \in \mathscr{T}$,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B).$$

On applique la première version de la formule des probabilités totales...

Exemple 24.6

On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3. On choisit une urne au hasard, et on pioche une boule dedans. On suppose que $\forall i \in [\![1,3]\!]$, l'urne U_i contient i boules blanches et 3 boules noires. Quelle est la probabilité que la boule piochée soit noire ?

À retenir

En particulier pour tout $(A, B) \in \mathscr{T}^2$:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right),$$

et si de plus $\mathbb{P}(A) \in]0;1[$,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\mathbb{P}_{\overline{A}}(B).$$

4 5 Formule de BAYES

Cette formule correspond au « retournement » d'un arbre.

Théorème 24-9

Deuxième formule de Bayes (probabilité des causes)
Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i\in I\subseteq\mathbb{N}}$ un système complet d'évènements.

$$\forall B \in \mathscr{T}, \quad \mathbb{P}_B(A_k) = \frac{\mathbb{P}_{A_k}(B) \times \mathbb{P}(A_k)}{\displaystyle\sum_{i\in I} \mathbb{P}_{A_i}(B) \times \mathbb{P}(A_i)}$$

On utilisera souvent ce théorème dans le cas particulier de deux évènements :

Théorème 24-10

Première formule de Bayes

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

On aurait pu écrire :

$$\mathbb{P}_{\text{effet}}(\text{cause}) = \frac{\mathbb{P}_{\text{cause}}(\text{effet}) \times \mathbb{P}(\text{cause})}{\mathbb{P}(\text{effet})}$$

Statistiquement, on a accès aux effets connaissant les causes (c'est le déterminisme...) mais dans la réalité, on subit les effets et on voudrait en connaître la cause.
Le cas le plus célèbre d'utilisation de la *statistique bayesienne* est le test de Covid. Les médecins « disposent » d'un échantillon de personnes atteintes du Covid ou non (et donc de $\mathbb{P}(C)$ et $\mathbb{P}(\overline{C})$) et d'un test de Covid. Ils font subir le test à tout l'échantillon et disposent donc de statistiques sur $\mathbb{P}_C(T)$, $\mathbb{P}_{\overline{C}}(\overline{T})$, $\mathbb{P}_{\overline{C}}(T)$ et $\mathbb{P}_C(\overline{T})$ mais ce qui intéresse le médecin et surtout la personne qui utilise le test c'est $\mathbb{P}_T(C)$ et $\mathbb{P}_{\overline{T}}(\overline{C})$...

5 Indépendance

La notions d'évènements indépendants est l'une des difficultés du calcul des probabilités. Comme souvent, cette notion purement mathématique renvoie, par son appellation, à une notion intuitive utilisée dans le langage courant. Il faut bien garder en mémoire que le mot du vocabulaire courant est souvent un « faux ami ».[b] Donnons tout d'abord sa définition.

Définition 24-8

Évènements indépendants
Les évènements A et B sont dits **indépendants** si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$

Ainsi, dans notre exemple de dés, on a $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \frac{1}{6} \times \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A \cap B)$, donc le lancer du 2ème dé est indépendant du premier, ce qui est rassurant.
Cette notion est purement abstraite et ne renvoie qu'à des propriétés mathématiques dont la principale est :

Théorème 24-11

Indépendance et probabilités conditionnelles
Soient A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Les évènements A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$

b. On aurait aussi bien parler de szjwrttrpgklance, mais cela aurait été plus difficile à prononcer.

On peut faire dire ce que l'on veut à des probabilités selon le modèle choisi.
Supposons que sur un groupe de 100 personnes, 20 portent des sous-vêtements en polystirène expansé (pour avoir chaud l'hiver), 50 se grattent la tête avec l'index gauche et 10 font les deux à la fois. On met ces 100 personnes dans une boîte et on en tire une au hasard. Vérifiez que les évènements « la personne tirée porte des sous-vêtements en polystirène expansé » et « la personne tirée se gratte la tête avec l'index gauche » sont indépendants.
Étudiez le même problème en considérant cette fois-ci que 15 personnes se grattent la tête avec l'index gauche (pourquoi pas).[c]
Veillez à ne pas confondre évènements *indépendants* et évènements *incompatibles*.

Danger

ATTENTION, ne pas confondre INDÉPENDANCE et INCOMPATIBILITÉ :

— **L'indépendance ne peut se juger qu'en rapport à la probabilité**. A et B sont indépendants pour P lorsque

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

— **L'incompatibilité est une notion ensembliste, qui ne dépend pas de la probabilité**. A et B sont incompatibles lorsque

$$A \cap B = \varnothing,$$

et on a alors (mais c'est une conséquence) : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

On peut montrer d'ailleurs que deux évènements incompatibles de probabilité non nulle ne sont jamais indépendants.
En effet, A et B sont incompatibles si, et seulement si, $A \cap B = \varnothing$, donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$. Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on a forcément $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.
La seule idée à retenir est que , si A et B sont indépendants, **avoir observé la réalisation de A ne modifie pas la probabilité d'une éventuelle réalisation de B**.
Ainsi, en supposant que la Française des Jeux n'utilise pas de boules truquées, on peut considérer que deux tirages successifs du loto sont indépendants.

Théorème 24-12

Complémentaire et indépendance
Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $(A, B) \in \mathscr{T}^2$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A et B sont indépendants.
2. A et $\overline{B}$ sont indépendants.
3. $\overline{A}$ et B sont indépendants.
4. $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Théorème 24-13

Indépendance mutuelle
Soit $(A_i)_{i \in I \subseteq \mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathscr{T}$.

1. On dit que ces événements sont **indépendants deux à deux** si, et seulement si :

$$\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j, \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(A_j)$$

2. On dit que ces événements sont **mutuellement indépendants** si, et seulement si, pour toute partie J de I on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$$

Danger

ATTENTION : vérifier $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$ n'est pas suffisant. Pas plus qu'il ne suffit de vérifier que les événements sont indépendants deux à deux.

c. De façon générale, la définition probabiliste de l'indépendance est plus large que la notion intuitive.

Recherche 24.4

On effectue un lancer de pile ou face. Déterminer une famille d'événements (A, B, C) qui vérifient $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$, mais qui ne forment pas une famille d'événements mutuellement indépendants.

Recherche 24.5

On lance deux fois une pièce équilibrée. Déterminer une famille d'événements (A, B, C) qui sont indépendants deux à deux, mais qui ne forment pas une famille d'événements mutuellement indépendants.

6 Avec Python

À retenir

On utilisera dans toute cette section le module numpy.random et non pas le module random qui est beaucoup plus lent. Attention ! Avec le premier, la borne supérieure n'est pas comprise alors qu'elle l'est avec le second.

6 1 Pile ou face ?

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie. On compte combien de fois pile (ou face) tombe :

```
def piece(n: int) -> list:
    T = []
    for k in range(n):
        X = 0
        for j in range(3):
            X += randint(0,2)
        T.append(X)
    return([ (T.count(i) / float(n)) for i in range(0,4) ])
```

sachant que :

— randint(1,2) renvoie un entier aléatoirement compris entre 1 et 2 ;

— T.count(j) compte le nombre de fois ou j apparaît dans la liste T.

Par exemple, pour un million de lancers :

```
In [250]: piece(1000000)
Out[250]: [0.124758, 0.375741, 0.374742, 0.124759]
```

En effet, $\binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0,125$ et $\binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} = 0,375$.

6 2 Tirage de boules dans des urnes

On peut adapter sans problème ce programme à la situation classique suivante : on dispose de trois urnes, la première contenant 7 boules blanches et 4 noires, la deuxième 5 blanches et 2 noires, la troisième 6 blanches et 3 noires.
On tire une boule dans chaque urne et on note le nombre de boules blanches obtenues.
xcom]randint

```
def boules(n: int) -> list:
    T = []
    for k in range(n):
        X = 0
        X += randint(1,12) <= 7
        X += randint(1,8)  <= 5
        X += randint(1,10)  <= 6
        T.append(X)
    return([ ( T.count(j) / float(n) ) for j in range(0,4) ])
```

et on obtient par exemple pour un million de simulations :

```
In [252]: boules(1000000)
Out[252]: [0.03488, 0.217687, 0.444994, 0.302439]
```

En effet, par exemple, $\frac{7}{11} \times \frac{5}{7} \times \frac{6}{9} \approx 0,303$ et $\frac{4}{11} \times \frac{2}{7} \times \frac{3}{9} \approx 0,034$.

6 3 Tirage de boules avec remise

Simulons le tirage successif de quatre boules avec remise dans une urne contenant 7 boules blanches et 3 boules noires. Comptons la fréquence des tirages contenant :

— exactement deux boules blanches ;

— au moins une boule blanche.

```python
def boule(n: int, nb: int) -> float:
    X=0
    for k in range(n):
        B = 0
        for j in range(1, 6):
            B += randint(1, 11) <= 7
        X += B == nb
    return X / n
```

Alors pour 100 000 tirages, on obtient pour deux boules blanches :

```
In [254]:  boule(1000000,2)
Out[254]: 0.264975
```

En effet, le tirage se fait sans remise. La probabilité d'obtenir $(\mathrm{N}, \mathrm{N}, \mathrm{B}, \mathrm{B})$ est :

$$\frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{441}{10\,000}$$

Les tirages de deux boules exactement sont les anagrammes de $(\mathrm{N}, \mathrm{N}, \mathrm{B}, \mathrm{B})$.
On multiplie donc le résultat précédent par $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$.

$$6 \times \frac{441}{10\,000} \approx 0{,}264\,6$$

Obtenir au moins une boule blanche est le contraire de n'en obtenir aucune :

```
In [255]: 1-boule(1000000,0)
Out[255]: 0.992068
```

En effet

$$1 - \left(\frac{3}{10}\right)^4 \approx 0{,}991\,9$$

Entraînement

Recherche 24.6 Chaussette

Un tiroir contient 8 paires de chaussettes toutes différentes. Un Ogre a mangé 12 chaussettes du tiroir au hasard, et le propriétaire - Nain - emporte les 4 chaussettes qui restent. Quelle est la probabilité qu'il obtienne :

1. 2 paires complètes ?
2. au moins une paire ?
3. une paire et une seule ?

Recherche 24.7 Livres sur une étagère

20 livres sont exposés sur une étagère rectiligne et répartis au hasard. Parmi ces 20 livres, 3 sont d'un même auteur A, les autres étant d'auteurs différents. Calculer la probabilité que les 3 livres de A se retrouvent côte à côte.

Recherche 24.8 Balles dans un panier

On lance n balles dans trois paniers, chaque panier pouvant accueillir plusieurs balles. Quelle est la probabilité qu'aucun panier ne soit vide ?

Recherche 24.9 Définition d'une probabilité

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ un ensemble infini dénombrable, les ω_i étant distincts deux à deux. On suppose que, pour tout entier naturel non nul k, $\mathbb{P}\left(\{\omega_k\}\right) = \frac{\lambda}{37^k}$ avec λ un réel.
Existe-il une valeur de λ telle que $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ soit un espace probabilisé ?

Recherche 24.10 Problèmes historiques

Tout a commencé au XVII$^{\text{e}}$ siècle, lorsque les Princes demandèrent aux mathématiciens de les aider à gagner au jeu...

1. Le Duc de Toscane demande à Galilée pourquoi, en lançant trois dés, on obtient plus souvent un total de 10 qu'un total de 9, alors qu'il y a dans les deux cas exactement 6 façons d'obtenir ces résultats.
2. Le Chevalier de Méré soutient à Pascal que les deux jeux suivants sont favorables au joueur : obtenir au moins un 6 en lançant 4 fois de suite un dé, et obtenir au moins un double 6 en lançant 24 fois de suite 2 dés.

Vous simulerez ces expériences à l'aide de Python et vous démontrerez les résultats observés.

Recherche 24.11 Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

On considère une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$. Partant de 0 on se déplace de $+1$ avec une probabilité $p \in]0,1[$, et de -1 avec probabilité $q = 1 - p$.

1. Soit p_n la probabilité qu'après n déplacements on soit retourné en 0. Calculer p_n en fonction de n.
2. Simplifier cette expression dans le cas où $p = \dfrac{1}{2}$.
3. Écrire un programme Python qui permet de simuler que si $p = \dfrac{1}{2}$ on a

$$p_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

Recherche 24.12 Formule de B. et Monica B.

En Syldavie, 70% des habitants sont de sexe masculin et 60% des hommes et 25% des femmes ont une photo de Monica B. dans leur portefeuille. Un extra-terrestre enlève au hasard une personne syldave et découvre une photo de Monica B. dans son portefeuille : quelle est la probabilité que la personne enlevée soit une femme ?

Conditionnement et indépendance

Recherche 24.13 Élevage de moutons

On a décelé dans un élevage de moutons, une probabilité 0.3 pour qu'un animal soit atteint par une maladie M. La probabilité qu'un mouton qui n'est pas atteint par M ait une réaction négative à un test T est 0.9. S'il est atteint par M, la probabilité qu'il ait une réaction positive à T est 0.8. Quelle est la probabilité qu'un mouton pris au hasard et ayant une réaction positive soit atteint par M ?

Recherche 24.14 QCM

Un étudiant répond à un QCM. Pour une question, il y a m choix. Soit l'étudiant connait la réponse, soit il en choisit une au hasard (uniformément). La probabilité que l'étudiant connaisse la réponse est notée $p \in]0,1[$. Son professeur constate que l'étudiant a répondu correctement.

1. Quelle est la probabilité qu'il ait répondu en connaissant la bonne réponse ?
2. Que devient cette probabilité si $m \to +\infty$? Interpréter.

Recherche 24.15 Sexe des enfants

On considère une famille de deux enfants.

1. On suppose que l'aîné est une garçon. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit aussi un garçon ?
2. On suppose que l'un au moins des enfants est un garçon. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit aussi un garçon ?

Recherche 24.16 L'obstination paye-t-elle ?

Toto sait qu'il a une probabilité très faible (une chance sur n avec n un entier très grand) de réussir à lancer une pièce de sorte à ce qu'elle se stabilise sur sa tranche. Toto est têtu. Très têtu. Il décide donc de tenter sa chance n fois.

1. Calculer la probabilité p_n pour que Toto réussisse son lancer au moins une fois.
2. Que devient cette probabilité lorsque $n \to +\infty$?

Recherche 24.17 Indépendance mutuelle et deux à deux

On jette deux dés bien équilibrés à six faces et on note A : « le premier score est impair » , B : « le deuxième score est impair » , C : « la somme des deux scores est impaire ». On suppose les évènements A et B indépendants.

1. Montrer que A et C sont indépendants puis que B et C sont indépendants.
2. Est-il vrai que $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$? Les évènements A, B et C sont-ils mutuellement indépendants ?

Recherche 24.18 Marylin et les chèvres

Dans le numéro du 9 septembre 1990 de *Parade*, Marilyn Vos Savant connue pour avoir un QI de 186, soit l'un des plus élevés au monde, répondit au courrier suivant : *Suppose you're on a game show, and you're given the choice of three doors. Behind one door is a car, behind the others, goats. You pick a door, say number 1, and the host, who knows what's behind the doors, opens another door, say number 3, which has a goat. He says to you, « Do you want to pick door number 2 ? » Is it to your advantage to switch your choice of doors ?*

Craig. F. Whitaker Columbia, MD

Cette lettre décrit en fait le déroulement d'un jeu télévisé des années 1970, *Let's make a deal*, animé par Carol Merril et **Monty Hall** : c'est en référence à ce dernier qu'on donna son nom à ce problème célèbre (plus tard, un haut représentant de la culture française reprit ce jeu : ce fut Lagaf et son *Bigdil*...).
Marilyn répondit qu'il valait mieux pour le candidat changer de porte quand le présentateur l'y invitait. Qu'en pensez-vous ?
Vous pourrez également proposer une simulation avec Python.

Recherche 24.19 **Téléphone Marseillais**

On considère n Marseillais, passionnés par les rumeurs de leur quartier, qui se transmettent une information I. La première personne reçoit cette information, la transmet à la deuxième personne, et ainsi de suite jusqu'à la n-ème personne qui l'annonce au stade Vélodrome. Chacun d'eux transmet ce qu'il a entendu avec la probabilité p (avec $0 < p < 1$) le contraire avec la probabilité $1 - p$. Calculer la probabilité p_n pour que l'information soit fidèlement transmise. Que se passe-t-il quand n tend vers l'infini ?

Recherche 24.20 **En avant-première ... les résultats du concours**

Dans une classe de BCPST de 30 élèves (5 garçons et 25 filles), 60% des filles et 80% des garçons sont reçues à Veto. On choisit un élève au hasard dans la classe. Sachant que cet élève est reçu, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un garçon ?

Recherche 24.21 **Duel**

Alexandre P. et Évariste G. s'affrontent en duel au pistolet suivant les règles suivantes :

— Ils tirent chacun leur tour. Le premier qui atteint l'autre a gagné...

— Lorsqu'il tire, Alexandre atteint Évariste avec la probabilité a $(0 < a < 1)$ et il le rate avec la probabilité $\overline{a} = 1 - a$.

— Lorsqu'il tire, Évariste atteint Alexandre avec la probabilité b $(0 < b < 1)$ et il le rate avec la probabilité $\overline{b} = 1 - b$.

— Alexandre tire le premier.*Ainsi, Alexandre (resp. Évariste) n'effectue que des tirs de rang impair (resp. pair).*

On considère, pour tout entier $n \geqslant 1$, les évènements A_{2n-1} : « Alexandre gagne à l'issue du tir numéro $2n-1$ », B_{2n} : « Évariste gagne à l'issue du tir numéro $2n$ ».

1. Calculez, en fonction de a et b, les probabilités des évènements A_1, B_2 et A_3. Plus généralement, calculez $\mathbb{P}(A_{2n-1})$ et $\mathbb{P}(B_{2n})$.
2. Pour $n \geqslant 1$, on note C_n (resp. D_n) l'évènement : « Alexandre (resp. Évariste) gagne à un tir dont le numéro est entre 1 et $2n-1$ (resp. entre 2 et $2n$) ». Calculer $\mathbb{P}(C_n)$ et $\mathbb{P}(D_n)$.
3. Calculer $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_n)$ et $\beta = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(D_n)$. Vérifiez que $\alpha + \beta = 1$. Comment interpréter ce résultat ?

Recherche 24.22 **Agro-Veto TB 2013**

On dispose d'une pièce faussée et de deux dés équilibrés D_1 et D_2.
La probabilité d'obtenir pile avec la pièce est de $\frac{1}{3}$.
Les deux dés ont chacun 6 faces, le dé D_1 a quatre faces rouges et deux blanches, le dé D_2 a deux faces rouges et quatre blanches.t
L'expérience est la suivante :

— nous commençons par jeter une pièce ;

— si nous obtenons PILE, nous choisissons le dé D_1, sinon, nous choisissons le dé D_2, choix définitif pour la suite de l'expérience,

— ensuite nous jetons plusieurs fois le dé choisi et pour chaque lancer, nous notons la couleur obtenue.

Nous nommons les évènements suivants :

— D_1 est l'évènement : « nous jouons avec le dé D_1 »,

— D_2 est l'évènement : « nous jouons avec le dé D_2 »,

— Pour tout entier naturel n, R_n est l'évènement : « nous avons obtenu une face rouge au n^e lancer du dé choisi ».

1. Quelles sont les valeurs de $\mathbb{P}(D_1)$ et $\mathbb{P}(D_2)$? Démontrer que $\{D_1, D_2\}$ constitue un système complet d'évènements.
2. Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$. Quelles sont les valeurs de $\mathbb{P}_{D_1}(R_n)$? de $\mathbb{P}_{D_2}(R_n)$?
3. Calculer $\mathbb{P}(R_1)$.
4. Établir un lien entre les probabilités $\mathbb{P}_{D_1}(R_1)$, $\mathbb{P}_{D_1}(R_2)$ et $\mathbb{P}_{D_1}(R_1 \cap R_2)$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)$.
5. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n :
$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) = \frac{2^n + 2}{3^{n+1}}$$
En déduire pour tout n de $\mathbb{N}^*$ la valeur de $\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n}(R_{n+1})$.

6. Calculer $\mathbb{P}_{R_1\cap R_2}(D_1)$ puis, de manière générale, pour tout entier naturel non nul n, démontrer que :

$$\mathbb{P}_{R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_n}(D_1) = \frac{2^n}{2^n+2}$$

7. Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$. Après n lancers ayant tous amené la face rouge, vaut-t-il mieux parier sur le fait que le dé est le dé D_1 ou sur le fait d'avoir une face rouge au lancer suivant ?

Problèmes de synthèse

Recherche 24.23 G2E 2022

Dans tout ce deuxième problème, on se place dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices de tailles 2×2 à coefficients réels). On note I_2 la matrice identité de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
Si A désigne une matrice, on note $A^\top$ sa transposée et si $A\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ alors $\det(A)$ désigne le déterminant de A. On pourra confondre $\mathbb{R}^2$ et $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
Dans la partie A du problème, on décrit certains ensembles inclus dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Dans la partie B, on utilise ces ensembles pour décrire l'ensemble des matrices qui commutent avec leur transposée. Enfin, dans la partie C, on calcule des probabilités relatives aux ensembles étudiés précédemment. Les trois parties ne sont pas indépendantes.

Partie A : Matrices symétriques et antisymétriques

L'ensemble des matrices symétriques de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ est noté $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$, il est défini par :

$$\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) = \left\{A\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}),\quad A = A^\top\right\}$$

De façon analogue, on considère l'ensemble des matrices dites antisymétriques de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, il est noté $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ et est défini par :

$$\mathscr{A}_2(\mathbb{R}) = \left\{A\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}),\quad A = -A^\top\right\}$$

1. **a.** Démontrer que :

$$\forall(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4,\qquad \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathscr{S}_2(\mathbb{R})\Leftrightarrow b=c.$$

b. En déduire que $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Donner une base de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.

2. On note dorénavant :

$$\mathscr{O}_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \varepsilon\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\varepsilon\cos(\theta)\end{pmatrix},\quad \theta\in\mathbb{R},\varepsilon\in\{-1,1\}\right\}$$

Dans cette question 2. uniquement, A désigne une matrice appartenant à $\mathscr{O}_2(\mathbb{R})$.
Que vaut $A^\top A$?

3. On note enfin :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

Vérifier que $J\in\mathscr{O}_2(\mathbb{R})$ et calculer J^2.

4. **a.** Exprimer $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ à l'aide de J et en déduire que $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ dont on donnera une base et la dimension.

b. En considérant I_2+J, démontrer que $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})\cup\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

Partie B : Matrices qui commutent avec leur transposée

Dans la suite de ce problème on considère l'ensemble des matrices qui commutent avec leur transposée :

$$\mathscr{C}_2(\mathbb{R}) = \left\{A\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}),\quad AA^\top = A^\top A\right\}$$

5. Proposer un exemple de matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ n'appartenant pas à $\mathscr{C}_2(\mathbb{R})$.

6. **a.** Démontrer que :

$$\mathscr{S}_2(\mathbb{R})\cup\mathscr{A}_2(\mathbb{R})\cup\mathscr{O}_2(\mathbb{R})\subset\mathscr{C}_2(\mathbb{R})$$

b. En considérant à nouveau $I_2 + J$, vérifier que :

$$\mathscr{C}_2(\mathbb{R}) \not\subset \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathscr{A}_2(\mathbb{R}) \cup \mathscr{O}_2(\mathbb{R})$$

7. **a.** Démontrer que :

$$\forall(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{C}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow b = c \text{ ou } (b = -c \text{ et } a = d).$$

b. En déduire que :

$$\mathscr{C}_2(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \operatorname{Vect}(I_2, J)$$

c. Déterminer enfin $\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cap \operatorname{Vect}(I_2, J)$.

Partie C : Calculs de probabilités

Dans cette partie du problème, X_1, X_2, X_3 et X_4 désignent quatre variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes définies sur un même univers Ω suivant toutes la loi uniforme sur $[\![-1, 1]\!]$, autrement dit :

$$\forall i \in [\![1, 4]\!], \quad \mathbb{P}(X_i = -1) = \mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{3}.$$

Pour tout $\omega \in \Omega$, on considère la matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} X_1(\omega) & X_2(\omega) \\ X_3(\omega) & X_4(\omega) \end{pmatrix}$$

8. **a.** Démontrer que pour tout $i \in [\![1, 4]\!], X_i^2$ suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.

b. Donner la loi de probabilité de X_iX_j pour tout $(i, j) \in [\![1, 4]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

c. En déduire que :

$$\mathbb{P}(\det(A) = 0) = \frac{11}{27}.$$

9. **a.** Démontrer que :

$$\mathbb{P}(A \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})) = \frac{1}{3}$$

b. Calculer également $\mathbb{P}(A \in \mathscr{A}_2(\mathbb{R}))$.

10. **a.** Démontrer que :

$$\mathbb{P}(A \in \mathscr{C}_2(\mathbb{R})) = \frac{11}{27}.$$

b. Calculer enfin la probabilité conditionnelle ci-dessous :

$$\mathbb{P}(A \in \mathscr{C}_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 0).$$

Recherche 24.24

Première Partie

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et I la matrice unité de taille 3.

1. On pose $J = M - I$.

a. Calculer J^2 en fonction de J.

b. Montrer par récurrence qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telle que pour tout entier naturel n on ait :

$$M^n = I + u_n J.$$

Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

c. Pour tout entier n on pose $v_n = u_n + 1/3$.
Montrer que v est géométrique. En déduire u_n en fonction de n.

2. Ecrire M^n pour tout entier naturel n.

3. **Méthode alternative**. Calculer J^k pour tout entier naturel k puis calculer directement M^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Deuxième partie

Les poules pondent des oeufs que l'on classe suivant trois calibres A, B et C(les petits les moyens et les gros).

— Si une poule pond un oeuf de calibre A, l'oeuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, Bou C avec des probablilités respectives de $1/2$, $1/4$ et $1/4$.

— Si une poule pond un oeuf de calibre B, l'oeuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, Bou C avec des probablilités respectives de $1/4$, $1/2$ et $1/4$.

— Si une poule pond un oeuf de calibre C, l'oeuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, Bou C avec des probablilités respectives de $1/4$, $1/4$ et $1/2$.

— Pour n entier naturel non nul, on désigne par a_n, b_net $c_n$les probablitités respectives pour que le nième oeuf pondu par une poule soit de calibre A, Bou C.

On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. **a.** Calculer a_{n+1}, b_{n+1}et c_{n+1} en fonction de a_n, b_net c_n. En déduire une matrice carrée U telle que $X_{n+1} = U.X_n$ pour tout entier n.

b. Exprimer U en fonction de M. En déduire U^n en fonction de n.

2. On suppose que le premier oeuf pondu par une poule est de calibre C.
Déduire des question précédentes a_n, b_net c_n en fonction de n, ainsi que leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

Recherche 24.25 **Concours**

Première partie

Le but de la première partie est de calculer les puissances successives de la matrice :

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$$

où a représente un nombre réel.

1. Montrer que, pour tous réels a, b, on a : $M(a).M(b) = M(a+b-3ab)$.

2. Montrer que si $a \neq 1/3$ il existe alors un réel b tel que $a+b-3ab = 0$. En déduire que si $a \neq 1/3$ alors la matrice $M(a)$ est inversible.
Calculer $M\left(1/3\right)^2$ et en déduire que $M\left(1/3\right)$ n'est pa sinversible.

3. Déterminer le réel a_0 non nul, tel que :

$$[M(a_0)]^2 = M(a_0)$$

4. On considère les matrices :

$$P = M(a_0) \quad \text{et} \quad Q = I - P$$

où I désigne la matrice unité d'ordre 3.

a. Montrer que pour tout a, il existe un réel α -que l'on exprimera en fonction de a- tel que :

$$M(a) = P + \alpha Q$$

b. Calculer P^2, QP, PQ, Q^2.

c. Pour tout entier naturel n, non nul, montrer que $[M(a)]^n$ s'écrit $x_n P + y_n Q$ avec x_n et y_n des réels.(on appelle celà une combinaison linéaire)

d. Expliciter alors la matrice $[M(a)]^n$.

Deuxième partie

Évolution d'un titre boursier au cours du temps.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $a \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$.

1. On définit des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par leur premier terme p_1, q_1, r_1, et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} p_{n+1} = (1-2a)p_n + aq_n + ar_n \\ q_{n+1} = ap_n + (1-2a)q_n + ar_n \\ r_{n+1} = ap_n + aq_n + (1-2a)r_n \end{cases}$$

a. Exprimer p_n, q_n, r_n en fonction de n, p_1, q_1, r_1.

b. Étudier la convergence de ces suites.

2. Dans une bourse de valeurs, un titre donné peut monter, rester stable, ou baisser. Dans un modèle mathématique, on considère que :

— le premier jour le titre est stable ;

— si un jour n, le titre monte, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$, restera stable avec la probabilité $\dfrac{1}{6}$, et baissera avec la probabilité $\dfrac{1}{6}$;

— si un jour n, le titre est stable, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité $\dfrac{1}{6}$, restera stable avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$, et baissera avec la probabilité $\dfrac{1}{6}$;

— si un jour n, le titre baisse, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité $\dfrac{1}{6}$, restera stable avec la probabilité $\dfrac{1}{6}$, et baissera avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$.

On note M_n (respectivement S_n, respectivement B_n) l'événement "le titre donné monte (respectivement reste stable, respectivement baisse) le jour n".

a. Exprimer les probabilités de hausse, de stabilité, et de baisse au jour $n+1$ en fonction de ces mêmes probabilités au jour n.

b. En déduire les probabilités de hausse, de stabilité, et de baisse au jour n.

c. Quelles sont les limites de ces probabilités lorsque n tend vers l'infini ?

Recherche 24.26

Soit A une matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $E = \{M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\}$.

1. Montrer que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel.

Dans la suite de l'exercice, la matrice A est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Déterminer une base $\mathscr{B}$ de E et montrer que $\dim E = 2$

3. Soient $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a. Montrer que $U \in E$.

b. Montrer que (U, V) est une autre base de E et déterminer les coordonnées de A dans cette base.

c. Calculer les produits U^2, UV, VU et V^2

d. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $A^n = \dfrac{3^n}{2}U + \dfrac{(-1)^n}{2}V$

4. On dispose à présent de deux urnes.
Une urne rouge contenant une boule rouge et deux boules vertes.
Une urne verte contenant deux boules rouges et une boule verte.
On effectue une suite de tirages avec remise de la façon suivante :

— Le premier tirage se fait dans l'urne rouge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, lors du $n^{\text{ième}}$ tirage,

— si la boule tirée est rouge (évènement R_n), le tirage suivant se fait dans l'urne rouge
— si la boule tirée est verte (évènement $V_{n,}$), le tirage suivant se fait dans l'urne verte.

a. Déterminer $P(R_{n+1})$ et $P(V_{n+1})$ en fonction de $P(R_n)$ et de $P(V_n)$

b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\begin{pmatrix} P(R_{n+1}) \\ P(V_{n+1}) \end{pmatrix} = \frac{1}{3}A \begin{pmatrix} P(R_n) \\ P(V_n) \end{pmatrix}$ puis la valeur de $P(R_n)$ et de $P(V_n)$ en fonction de U, V.et de n.

c. Déterminer enfin la limite de ces probabilités, quand n tend vers $+\infty$

Recherche 24.27 **Concours**

Partie I

Résolution dans l'ensemble des matrice carrées de taille 2 de l'équation

$$Z^2 = A \tag{24.1}$$

où Z est la matrice inconnue et A une matrice donnée de la forme
$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$ avec $0 < a < 1$.

1. Dans cette question, on suppose que $a = 5/8$ et donc $A = \begin{pmatrix} 5/8 & 3/8 \\ 3/8 & 5/8 \end{pmatrix}$

a. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer P^2 puis P^4.Montrer que P est inversible et trouver sa matrice inverse.

b. Montrer que la matrice $D = P^{-1}.A.P$ est diagonale et donner sa valeur.

2. On se place désormais dans le cas général où $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$ avec $0 < a < 1$.

Montrer que la matrice $D_a = P^{-1}.A.P$ (où P est la matrice précédente) est diagonale .

3. Soit $Y = P^{-1}.Z.P$.

a. Montrer que l'équation (24.1) équivaut à

$$Y^2 = D_a \tag{24.2}$$

b. On cherche à résoudre l'équation (24.2) en prenant Y sous la forme générale : $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

c. i. Ecrire le système de quatre équations à quatre inconnues x, y, z et t qui est équivalent à l'équation (24.2)

ii. Montrer (par l'absurde) qu'aucune solution de (24.2) ne vérifie $x + t = 0$.

iii. Résoudre ce sytème et donner toutes les solutions de l'équation (24.2) (on dicutera suivant la valeur de $a, 0 < a < 1$).

d. En déduire que l'équation (24.1) admet respectivement 0, 2 ou 4 solutions suivant que :

i. $a < 1/2$, $a = 1/2$ ou $a > 1/2$.

e. Donner les quatre solutions de l'équation dans le cas où $a = 5/8$.

Partie II

Application dans un problème de probabilité.
Dans une fête foraine un stand de loterie propose aux joueurs de tenter leur chance de la manière suivante :
On dispose de trois sacs, S, T et U.
Le sac S contient 5 jetons : deux rouges, deux verts et un jaune.
Le sac T contient 8 jetons : 5 marqués 1 et 3 marqués 0.
Le sac U contient 8 jetons : 3 marqués 1 et 5 marqués 0.
La personne qui veut tenter sa chance commence par tirer au hasard et simultanément trois jetons du sac S. Si le tirage est tricolore, elle tire au hasard un jeton du sac T, sinon elle tire au hasard un jeton du sac U.
Elle gagne si le dernier jeton tiré est marqué 1.

1. Dénombrement.

a. Modéliser les résultats possibles du premier tirage.

b. Modéliser les résultats "tirage tricolore"

2. Probabilité.

a. Soit E l'évènement : "les jetons tirés du sac S sont de trois couleurs différentes". Calculer la probabilité de E et de $\overline{E}$.

b. Soit G_1l'évènement "la personne gagne".
Calculer la probabilité de G_1 à l'aide de $p(E)$ et de $p(\overline{E})$ et en déduire $p(G_1)$.

c. Montrer que $\begin{pmatrix} p(G_1) \\ p(\overline{G}_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/8 & 3/8 \\ 3/8 & 5/8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p(E) \\ p(\overline{E}) \end{pmatrix}$.

3. Le propriétaire du stand modifie les règles du jeu de la façon suivante :

— La personne qui veut tenter sa chance commence par tirer au hasard et simultanément trois jetons du sac S.

— Si le tirage est tricolore, elle tire au hasard un jeton du sac T, sinon elle tire au hasard un jeton du sac U.

Puis :

— Si le jeton tiré est marqué 1 (on note F cet évènement), elle remet ce jeton dans le sac d'où elle vient de le tirer et elle tire au hasard un jeton du sac T.

— Si le jeton tiré est marqué 0 (on note $\overline{F}$ cet évènement), elle remet ce jeton dans le sac d'où elle vient de le tirer et elle tire au hasard un jeton du sac U.

Elle gagne si le dernier jeton tiré est marqué 1. De plus la composition du sac S est inchangé mais

— le sac T contient n jetons marqués 1 et $8-n$ marqués 0,

— le sac U contient $8-n$ jetons marqués 1 et n marqués 0,

n étant un entier $1 \leqslant n \leqslant 7$. On pose $p = n/8$ et $q = 1-p$
On note encore E l'évènement " les jetons tirés du sac S sont de trois couleurs différentes" et on note cette fois G_2 l'évènement "la personne gagne".

a. Démontrer que $\begin{pmatrix} p(G_2) \\ p(G_2) \end{pmatrix} = B^2 . \begin{pmatrix} p(E) \\ p(E) \end{pmatrix}$ avec $B = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$

b. Utiliser la question 3.d) de la partie I pour trouver deux valeurs de n pour lesquelles

$$p(G_2) = p(G_1)$$

($p(G_1)$ étant la valeur calculée calculée au 1).

Recherche 24.28 Modèle de Wright-Fisher

On observe une population de 4 individus pouvant être de deux types différents, notés A et a. On suppose que la taille de cette population reste constante et que la reproduction de ces individus est aléatoire et asexuée. Plus précisément, on considère que la probabilité pour un individu donné de la génération $k+1$ ($k \in \mathbb{N}^*$) d'avoir pour parent un certain individu de la génération k est uniforme (toutes les éventualités sont équiprobables). Initialement, il n'y a qu'un individu de type A. Ensuite, on note Y_k le nombre d'individus de la génération k qui sont de type A.

1. Calculer $\mathbb{P}(Y_1 = j)$ pour tout $j \in [\![0,4]\!]$.

2. En déduire $\mathbb{P}(Y_2 = j)$ pour tout $j \in [\![0,4]\!]$.

3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, calculer $p_{k,j} = \mathbb{P}(Y_k = j)$ pour tout $j \in [\![0,4]\!]$.

4. En déduire qu'il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_5(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} p_{k,0} \\ p_{k,1} \\ p_{k,2} \\ p_{k,3} \\ p_{k,4} \end{pmatrix} = M^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Recherche 24.29 Reproduction par autogamie

Certaines plantes, par exemple le lupin, se reproduisent par autofécondation (ou autogamie). Tout se passe pour la descendance comme si on fécondait deux plantes de même génotype, chaque chromosome d'une paire étant sélectionné au hasard. On s'intéresse à l'évolution du génotype d'une plante concernant un gène qui possède deux allèles A et a.

1. Expliquer ce qui se passe pour la descendance si la plante est de génotype AA ou aa. On suppose désormais que la plante mère est de génotype Aa.
2. Déterminer les probabilités que la descendance de première génération soit une plante de génotype AA, Aa ou aa.
   — E_n : « La plante de la n-ème génération est de génotype AA » ;
   — F_n : « La plante de la n-ème génération est de génotype Aa » ;
   — G_n : « La plante de la n-ème génération est de génotype aa ».
3. On note $x_n = \mathbb{P}(E_n)$, $y_n = \mathbb{P}(F_n)$ et $z_n = \mathbb{P}(G_n)$.
   a. Que valent x_0, y_0 et z_0 ?
   b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $x_n + y_n + z_n$?
   c. Exprimer x_{n+1}, y_{n+1} et z_{n+1} en fonction de x_n, y_n et z_n.
   d. En déduire une expression explicite de x_n, y_n et z_n en fonction de n.0.
4. Déterminer les limites de ces trois suites et interpréter.

Python

Recherche 24.30

On lance 10 fois de suite une pièce de monnaie et l'on s'intéresse au nombre maximal de résultats consécutifs égaux.
On crée un programme qui simule autant de séries de lancers que l'on désire.
On obtiendra quelque chose du style :

```
In [286]:  piece_max(100000)
Out[286]: 'Sur 100000  séries de 10 lancers, la moyenne du nombre maximal de résultats consécutifs égaux est
    3.52318'
```

Recherche 24.31 Le lièvre et la tortue

On rappelle le jeu bien connu : on dispose d'un dé cubique. On le lance. Si un six sort, le lièvre gagne sinon la tortue avance d'une case. La tortue a gagné lorsqu'elle a avancé six fois de suite. Quelle est la probabilité que la tortue gagne ?

Des solutions...

...en vrac : qui est qui ?

1. D'après le cours, il y a $\binom{n}{k}$ parties de E formées de k éléments.
2. D'après le cours, il y a n^k k-uplets de E.
3. D'après le cours, il y a $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ k-uplets d'éléments de E deux à deux distincts.
4. On commence par choisir les k éléments deux à deux distincts, sans tenir compte de l'ordre des choix : $\binom{n}{k}$ choix possibles. Ensuite on choisit le plus petit de ces éléments : 1 seul choix possible (car les k éléments sont 2 à 2 distincts), et on le place en première position du k-uplet. Puis on choisit le plus grand de ces éléments : 1 seul choix possible, et on le place en dernière position du k-uplet. Dernière étape : on place les $k-2$ éléments restants dans les $k-2$ positions restantes du k-uplet : $(k-2)!$ choix possibles.
   Donc au total, il y a $\binom{n}{k} \times (k-2)! = \frac{n!}{k(k-1)(n-k)!}$ k-uplets d'éléments de E deux à deux distincts, tels que le premier élément est le plus petit et le dernier le plus grand.
5. On commence là aussi par choisir les k éléments deux à deux distincts, sans tenir compte de l'ordre des choix : $\binom{n}{k}$ choix possibles.
   Ensuite on les met dans l'ordre strictement croissant : 1 seule possibilité.
   Donc au total, il y a $\binom{n}{k} \times 1 = \binom{n}{k}$ k-uplets d'éléments de E dans l'ordre strictement croissant.

On modélise la distribution d'une main de 5 cartes par le choix d'une combinaison de 5 cartes parmi 32 (car l'ordre dans lequel les cartes sont distribuées n'a pas d'influence sur le jeu du joueur). L'univers Ω est donc l'ensemble des combinaisons de 5 cartes parmi 32, et $|\Omega| = \binom{32}{5} = 201\,376$.
Remarquons ensuite que dans un jeu de 32 cartes, il y a 4 couleurs (trèfle, carreau, coeur et pique) et 8 hauteurs dans chaque couleur (7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as).
Toutes les figures considérées dans cet exercice dépendent de la hauteur des 5 cartes de la main du joueur. Pour les dénombrements, nous allons donc commencer par choisir la hauteur des 5 cartes, puis leur couleur.

1. On note A l'évènement : « obtenir une seule paire ».

   $$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{une hauteur parmi 8}}}{\binom{8}{1}} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2 cartes dans cette hauteur}}}{\binom{4}{2}} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{3 hauteurs dans les 7 restantes}}}{\binom{7}{3}} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{une carte dans chaque hauteur}}}{\binom{4}{1}^3}$$

   Remarquons que le choix des deux cartes de la paire se fait de $\binom{4}{2}$ façons différentes et non pas de $\binom{4}{1}^2$ façons, car obtenir « roi de coeur, roi de trèfle » donne la même paire qu'obtenir « roi de trèfle, roi de coeur ». Il ne faut donc le compter qu'une seule fois.
   On a donc :
   $$|A| = \binom{8}{1}\binom{4}{2}\binom{7}{3}\binom{4}{1}^3 = 107\,520$$
   mains avec une paire possibles.
2. On note B l'évènement : « obtenir deux paires ».
   On adopte la même méthode. Il faut choisir la hauteur de chacune des 2 paires : $\binom{8}{2}$ possibilités (car « paire de roi, paire de 7 » donne la même main que « paire de 7, paire de roi »), la hauteur de la cinquième carte : $\binom{6}{1}$ possibilités, la couleur des deux cartes de la première paire : $\binom{4}{2}$ possibilités, la couleur des deux cartes de la seconde paire : $\binom{4}{2}$ possibilités, et la couleur de la cinquième carte : $\binom{4}{1}$ possibilités.
   Au total :
   $$|B| = \binom{8}{2} \times \binom{4}{2}^2 \times \binom{6}{1} \times \binom{4}{1} = 24\,192$$
   mains avec deux paires.
3. On note C l'évènement : « obtenir un brelan ».
   Il faut choisir la hauteur des trois premières cartes : $\binom{8}{1}$ possibilités, les hauteurs des deux autres cartes : $\binom{7}{2}$ possibilités la couleur des trois premières cartes : $\binom{4}{3}$ possibilités, la couleur de la quatrième carte : $\binom{4}{1}$ possibilités, et la couleur de la cinquième carte : $\binom{4}{1}$ possibilités.
   Au total :
   $$|C| = \binom{8}{1} \times \binom{4}{3} \times \binom{7}{2} \times \binom{4}{1}^2 = 10\,752$$
4. On note D l'évènement : « obtenir un carré »
   Il faut choisir la hauteur des quatre premières cartes : $\binom{8}{1}$ possibilités, la hauteur de la cinquième carte : $\binom{7}{1}$ possibilités, la couleur des quatres premières cartes : $\binom{4}{4}$ possibilité, et la couleur de la cinquième carte : $\binom{4}{1}$ possibilités.
   Au total :
   $$|D| = \binom{8}{1} \times \binom{4}{4} \times \binom{7}{1} \times \binom{4}{1} = 224$$

5. On note E l'évènement : « obtenir un full ».
Il faut choisir la hauteur des trois premières cartes : $\binom{8}{1}$ possibilités, la hauteur des deux autres cartes : $\binom{7}{1}$ possibilités, la couleur des trois premières cartes : $\binom{4}{3}$ possibilités, et la couleur des deux cartes de la paire : $\binom{4}{2}$ possibilités.
Au total :

$$|E| = \binom{8}{1} \times \binom{4}{3} \times \binom{7}{1} \times \binom{4}{2} = 1344$$

Ω est l'union disjointe des ω_i donc

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\geqslant 1}\{\omega_i\}\right) = \sum_{i\geqslant 1}\mathbb{P}(\omega_i)$$

d'après le troisième axiome de Kolmogorov.
Or $\mathbb{P}(\omega_i) = \frac{\lambda}{37^i}$ donc

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i\geqslant 1}\frac{\lambda}{37^i} = \lambda\sum_{i\geqslant 1}\left(\frac{1}{37}\right)^i$$

Petit rappel : la somme des termes d'une suite géométrique vaut

$$\text{premier terme} \times \frac{1 - \text{ raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

Ici

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{37}\right)^i = \frac{1}{37}\times\frac{1-(1/37)^n}{1-1/37} = \frac{1}{36}\left(1-(1/37)^n\right)$$

Or $|1/37| < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty}(1/37)^n = 0$. On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{37}\right)^i = \frac{1}{36}$$

puis que $\mathbb{P}(\Omega) = \frac{\lambda}{36}$. Or, le deuxième axiome de monsieur K. impose que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Nous en déduisons que nécessairement $\lambda = 36$.
Il reste à vérifier que cette valeur suffit à faire de $(\Omega, \mathbb{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Le deuxième axiome est déjà vérifié.
Toute partie A de Ω est l'union disjointe de ω_i avec $i \in I$ une famille incluse dans $\mathbb{N}^\star$ donc :

$$0 \leqslant \mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I}\frac{36}{37^i} \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}^\star}\frac{36}{37^i} = 1$$

ce qui assure que le premier axiome est vérifié.
Soit B une partie de Ω telle que $A \cap B = \varnothing$. B est alors l'union disjointe de ω_i avec $i \in J$ une famille incluse dans $\mathbb{N}^\star$ et telle que $I \cap J = \varnothing$ et $I \cup J \subseteq \Omega$.

$$\mathbb{P}(A\cup B) = \sum_{i\in I\cup J}\frac{36}{37^i} = \sum_{i\in I}\frac{36}{37^i} + \sum_{i\in J}\frac{36}{37^i} = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

ce qui assure que le troisième axiome est vérifié.

Appelons M l'évènement : « le Syldave enlevé est un homme », F l'évènement « le Syldave enlevé est une femme » et M « le Syldave enlevé a une photo de Monica B. dans son portefeuille ».
On cherche à calculer $\mathbb{P}(F \mid B)$. On applique la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(F \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid F)\times\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(B)}$$

puis la formule des probabilités totales, sachant que F et M réalisent une partition de l'univers :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid H)\times\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(B \mid F)\times\mathbb{P}(F) = 0,6\times 0,7 + 0,25\times 0,3 = 0,495$$

On en déduit que :

$$\mathbb{P}(F \mid B) = \frac{0,25\times 0,3}{0,495} = \frac{5}{33}$$

Simulons la situation avec Python :

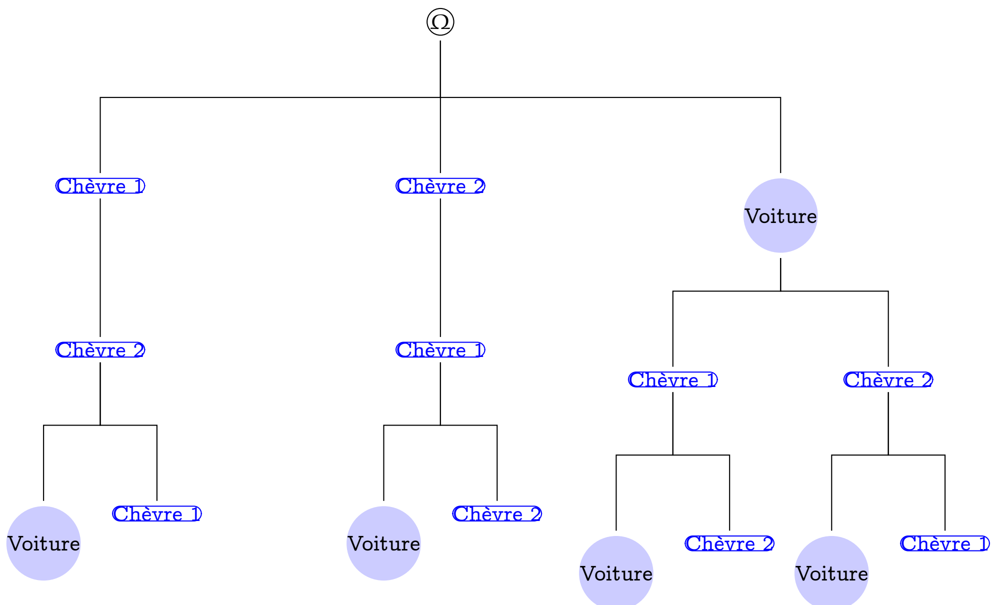
```python
def monty(n: int) -> str:
    gagne_sans_changer = 0
    gagne_en_changeant = 0
    for j in range(n):
        voiture = randint(0,2)
        choix   = randint(0,2)
        if choix == voiture:
            ouverte = (voiture + 1 + randint(0,1)) % 3
        else:
            ouverte = 0 + 1 + 2 - choix - voiture
        changement = 0 + 1 + 2 - choix - ouverte
        if choix == voiture:
            gagne_sans_changer += 1
        if changement == voiture:
            gagne_en_changeant += 1
    return f"Gagne en changeant : {100.*gagne_en_changeant/n}%   Gagne sans changer : {100.*gagne_sans_changer/n}%"
```

On obtient alors, pour 10 000 000 de simulations :

```
66.497    33.503
```

La deuxième option semble la bonne...il reste à le démontrer !
Dressons un arbre en trois étapes (après avoir numérotées nos deux chèvres) :

- Le candidat choisit d'abord une porte de manière équiprobable ;
- Le présentateur, sachant où se trouve la voiture, choisit une porte cachant une chèvre ;
- Le candidat prend ensuite la décision de garder ou de changer son choix initial.



Le premier nœud correspond au choix initial du joueur, le second à la chèvre découverte par le présentateur, et le troisième au choix final du joueur.
Notons A l'évènement « le joueur gagne en conservant son choix initial ». Il n'y a que deux déroulements de l'expérience qui réalisent A :

- le joueur choisit la porte cachant la voiture (avec probabilité $\frac{1}{3}$), le présentateur choisit la porte cachant la chèvre 1 (avec probabilité $\frac{1}{2}$), le joueur choisit de garder son choix initial (avec probabilité $\frac{1}{2}$) ;
- le joueur choisit la porte cachant la voiture (avec probabilité $\frac{1}{3}$), le présentateur choisit la porte cachant la chèvre 2 (avec probabilité $\frac{1}{2}$), le joueur choisit de garder son choix initial (avec probabilité $\frac{1}{2}$).

On a donc :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

De même, notons B l'évènement « le joueur gagne en changeant son choix initial ». Il n'y a que deux déroulements de l'expérience qui réalisent B :

- le joueur choisit la porte cachant la chèvre 1 (avec probabilité $\frac{1}{3}$), le présentateur choisit la porte cachant la chèvre 2 (avec probabilité 1), le joueur choisit de changer son choix initial (avec probabilité $\frac{1}{2}$) ;
- le joueur choisit la porte cachant la chèvre 2 (avec probabilité $\frac{1}{3}$), le présentateur choisit la porte cachant la chèvre 1 (avec probabilité $\frac{1}{2}$), le joueur choisit de changer son choix initial (avec probabilité $\frac{1}{2}$).

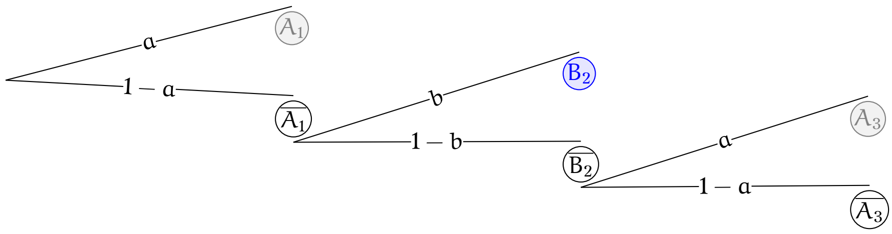
On a donc :

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$$

Il vaut donc mieux pour le candidat changer son choix initial.
Pour avoir une idée de la controverse passée et présente autour de ce problème voir : http://fr.wikipedia.org/wiki/Problème_de_Monty_Hall
Nous avons ici supposé que le joueur garde/change son choix initial de manière équiprobable, ce qui peut être discuté...

---

1. Dressons un arbre :



Remarquons que les tirs ne sont pas indépendants, car ils n'ont lieu que si personne n'a gagné au tour précédent...
D'après la formule des probabilités composées :

— $\mathbb{P}(A_1) = a$
— $\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_2 \cap \overline{A_1}) = \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}(B_2|\overline{A_1}) = (1-a)b$
— $\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{A_1}) = \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}(\overline{B_2}|\overline{A_1})\mathbb{P}(A_3|\overline{B_2} \cap \overline{A_1}) = (1-a)(1-b)a$

De manière générale, pour tout entier naturel n non nul :

— $\mathbb{P}(A_{2n-1}) = (1-a)^{n-1}(1-b)^{n-1}a$
— $\mathbb{P}(B_{2n}) = (1-a)^n(1-b)^{n-1}b$

2. C_n est une réunion d'évènements bien sûr deux à deux incompatibles

$$C_n = A_1 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_{2n-1}$$

On en déduit que, pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C_n) &= \sum_{k=1}^{n}(1-a)^{k-1}(1-b)^{k-1}a \\
&= a\sum_{k=0}^{n-1}(1-a)^k(1-b)^k \\
&= a\frac{1-(1-a)^n(1-b)^n}{1-(1-a)(1-b)}
\end{aligned}$$

car $(1-a)(1-b) \neq 1$.
On obtient de même que, pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D_n) &= \sum_{k=1}^{n}(1-a)^k(1-b)^{k-1}b \\
&= \frac{b}{1-b}\sum_{k=1}^{n}(1-a)^k(1-b)^k \\
&= b(1-a) \times \frac{1-(1-a)^n(1-b)^n}{1-(1-a)(1-b)}
\end{aligned}$$

3. Comme $|1-a| < 1$ et $|1-b| < 1$ on obtient :

$$\alpha = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_n) = \frac{a}{1-(1-a)(1-b)}$$

$$\beta = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(D_n) = \frac{b(1-a)}{1-(1-a)(1-b)}$$

On vérifie que $\alpha + \beta = \frac{a+b(1-a)}{1-(1-a)(1-b)} = \frac{a+b-ab}{a+b-ab} = 1$.
On peut interpréter ce résultat de la façon suivante : au bout d'un très grand nombre de tours, il y a toujours un des deux joueurs qui gagne...

```python
def piece_max(n: int) -> str:
    S = n*[1]
    for k in range(n):
        s = []
        P = [randint(0, 2) for z in range(10)]
        p = 0
        while p < 9:
            j = p + 1
            while (P[j] == P[p] and j < 9):
                j += 1
            s . append(j - p)
            p = j
        s.sort(reverse=True)
        S[k] = s[0]
    m = sum(S) / n
    return f"Sur {n} séries de 10 lancers, la moyenne du nombre maximal de résultats consécutifs égaux est
        ↪  {m}"
```