EXTERNAT-CHAVAGNES

BCPST$_1$ **Samedi 23 septembre**

Devoir surveillé nº 1 - Mathématiques

Durée : 1 heure et 30 minutes

Exercice I. (*Questions de cours*)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left(\sqrt{x}\right)^x = x^{\sqrt{x}}$.
2. On note P la proposition « si n est un entier impair alors son carré est impair ».
   a. Écrivez à l'aide de quantificateurs :
      i. P
      ii. la réciproque R de P
      iii. la négation N de P
      iv. la contraposée C de P
   b. Démontrer P.
   c. Est-ce que R, N et C sont aussi des théorèmes (Justifiez vos réponses) ?

Exercice II. (*De nouvelles fonctions*)
On appelle cosinus hyperbolique la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{ch}\ :\ x \mapsto \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

sinus hyperbolique la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{sh}\ :\ x \mapsto \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

et tangente hyperbolique la fonction définie par

$$\mathrm{th}\ :\ x \mapsto \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

1. Exprimez $\mathrm{th}(x)$ uniquement en fonction de e^x et e^{-x}, puis uniquement en fonction de e^{2x}, enfin uniquement en fonction de e^{-2x}.
2. Démontrez que $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.
3. Déterminez les dérivées de ces trois fonctions uniquement en fonction de ch et sh.

Exercice III.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\ln(x-4) = \ln(x) - 2\ln(2)$

Exercice IV.
Soit x un réel positif. Démontrer $(\forall n \in \mathbb{N})((1+x)^n \geqslant 1 + nx)$

Exercice V.
On considère la suite u de premiers termes $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et telle que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n)$$

1. Calculez u_2, u_3 et u_4.
2. Proposez alors une formule ne dépendant que de n permettant de calculer u_n et démontrez votre proposition.

Exercice VI.

1. Créez une fonction `est_inclus(ens1:list, ens2: list) -> bool` qui teste si tous les éléments de `ens1` sont des éléments de `ens2`.
2. Créez une fonction `est_egal(ens1:list, ens2: list) -> bool` qui teste si `ens1` et `ens2` ont les mêmes éléments.