Severus ROGUE
BCPST1

DS 1 - Mathématiques

Exercice 1 1) Soit (E) l'équation $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$

- $\sqrt{x}$ est défini si et seulement si $x \geq 0$
- $(\sqrt{x})^x = e^{x\ln(\sqrt{x})} = e^{\frac{1}{2}x\ln(x)}$ est défini si et seulement si $x > 0$
- $x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}\ln(x)}$ est aussi défini sur $]0,+\infty[$

Finalement on résoudra (E) sur $]0,+\infty[$

$(E) \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x\ln(x)} = e^{\sqrt{x}\ln(x)}, \quad x > 0$

$(E) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x\ln(x) = \sqrt{x}\ln(x), \quad x > 0$

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ \frac{1}{2}x = \sqrt{x}, \quad x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \end{cases}$

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ \frac{x}{\sqrt{x}} = 2, \quad x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \end{cases}$

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ \sqrt{x} = 2, \quad x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \end{cases}$

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = 4 \end{cases}$ donc (E

2. Soit n un entier

2-a P: $(\exists k \in \mathbb{Z})(n = 2k+1) \Rightarrow (\exists \ell \in \mathbb{Z})(n^2 = 2\ell+$

2-b R: $(\exists \ell \in \mathbb{Z})(n^2 = 2\ell+1) \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(n = 2k+1$

2-c N: $(\exists k \in \mathbb{Z})(n = 2k+1) \wedge (\forall \ell \in \mathbb{Z})(n^2 \neq 2\ell+1$

2-d C: $(\forall \ell \in \mathbb{Z})(n^2 \neq 2\ell+1) \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{Z})(n = 2k+$

I-2-b

$(\exists k \in \mathbb{Z})(n = 2k+1) \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2$
$\Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1$
$\Rightarrow n^2 = 2\underbrace{(2k^2+2k)}_{\ell \in \mathbb{Z}} + 1$
$\Rightarrow (\exists \ell \in \mathbb{Z})(n^2 = 2\ell + 1)$

I-2-c • puisque P est un théorème, sa contraposée C aussi et sa négation N est fausse

• la contraposée de R est :
si n est pair alors n^2 est pair
i.e. $(\exists k \in \mathbb{Z})(n = 2k) \Rightarrow (\exists \ell \in \mathbb{Z})(n^2 = 2\ell)$
or $(\exists k \in \mathbb{Z})(n = 2k) \Rightarrow n^2 = 4k^2$
$\Rightarrow n^2 = 2 \times \underbrace{(2k^2)}_{\ell \in \mathbb{Z}}$
$\Rightarrow (\exists \ell \in \mathbb{Z})(n^2 = 2\ell)$

la contraposée de R étant un théorème, R aussi

EXERCICE II

1- $th(x) = \dfrac{sh(x)}{ch(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \times \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

$$\boxed{th(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}$$

$$th(x) = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \frac{\frac{e^{2x}-1}{e^x}}{\frac{e^{2x}+1}{e^x}}$$

donc $\boxed{th(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}$

aussi $th(x) = \dfrac{\dfrac{1}{e^{-2x}} - 1}{\dfrac{1}{e^{-2x}} + 1} = \dfrac{\dfrac{1-e^{-2x}}{e^{-2x}}}{\dfrac{1+e^{-2x}}{e^{-2x}}}$

$$\boxed{th(x) = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}}$$

II-2

$$ch^2(x) - sh^2(x) = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x} - (e^{2x}-2e^xe^{-x}+e^{-2x})}{4}$$

$$= \frac{e^{2x}+2+e^{-2x} - e^{2x}+2-e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{4}{4}$$

donc $\boxed{ch^2(x) - sh^2(x) = 1}$

II-3 $ch'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = sh(x)$

$sh'(x) = \dfrac{e^x - (-e^{-x})}{2} = ch(x)$

EXERCICE III

Soit (E) l'équation $2\ln(x-4) = \ln(x) + 2\ln(2)$

(E) est défini si et seulement si :

$$\begin{cases} x-4>0 \\ x>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>4 \\ x>0 \end{cases}$$

donc (E) est définie sur $]4, +\infty[$

$$(E) \Leftrightarrow \ln\left((x-4)^2\right) = \ln(x) + \ln(4)$$
$$\Leftrightarrow \ln\left((x-4)^2\right) = \ln(4x)$$
$$\Leftrightarrow (x-4)^2 = 4x$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 4x$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 16 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-6)^2 - 36 + 16 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-6)^2 = 20$$
$$\Leftrightarrow x - 6 = \sqrt{20} \quad \text{ou} \quad x - 6 = -\sqrt{20}$$
$$\Leftrightarrow x = 6 + 2\sqrt{5} \quad \text{ou} \quad x = 6 - 2\sqrt{5}$$

or $6 - 2\sqrt{5} \notin]4, +\infty[$

donc $\boxed{(E) \Leftrightarrow x = 6 + 2\sqrt{5}}$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$

EXERCICE IV

- Soit n un entier naturel et P_n la proposition : $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$

- $(1+x)^0 = 1$ $\qquad 1 + 0 \times x = 1$

  donc $(1+x)^0 \geqslant 1 + 0x$ et P_0 est vraie

- $P_n \Rightarrow (1+x)^n \geqslant 1 + nx$

  $P_n \Rightarrow (1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geqslant (1+x)(1+nx)$ car $1+x > 0$

  $P_n \Rightarrow (1+x)^{n+1} \geqslant 1 + nx + x + nx^2$

  $P_n \Rightarrow (1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)x$ car $nx^2 \geqslant 0$

  $P_n \Rightarrow$ ~~1+x~~ P_{n+1}

- La proposition étant héréditaire et vraie au rang 0, elle est vraie pour tout entier naturel n d'après le principe de récurrence simple

EXERCICE V

1- $u_2 = 2u_1 + 3u_0 = 9 = 3^2$
$u_3 = 2u_2 + 3u_1 = 27 = 3^3$
$u_4 = 2u_3 + 3u_2 = 81 = 3^4$
or $u_0 = 1 = 3^0$ et $u_1 = 3 = 3^1$

2- • Soit $n \in \mathbb{N}$ et P_n la proposition
$u_n = 3^n$

• $u_0 = 1 = 3^0$ donc P_0 est vraie et P_1 aussi
$u_1 = 3 = 3^1$

• $P_n \wedge P_{n+1} \Rightarrow u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n = 2\times 3^{n+1} + 3\times 3^n$

$P_n \wedge P_{n+1} \Rightarrow u_{n+2} = 2\times 3^{n+1} + 3^{n+1}$
$\Rightarrow u_{n+2} = 3^{n+1}\times(2+1)$
$\Rightarrow u_{n+2} = 3^{n+1}\times 3$
$\Rightarrow u_{n+2} = 3^{n+2}$
$\Rightarrow P_{n+2}$

• La proposition étant héréditaire et vraie aux rangs 0 et 1, elle est vraie pour tout entier naturel d'après le principe de récurrence double

EXERCICE VI

1-
```
def est_inclus (ens1: list, ens2: list) -> bool:
    for e in ens1:
        if e not in ens2:
            return False
    return True
```

2-
```
def est_egal (ens1: list, ens2: list) -> bool
    return est_inclus(ens1, ens2) and est_inclus(ens2, ens1)
```