



# EXTERNAT DES ENFANTS NANTAIS

---

 BCPST<sub>1</sub>

 Samedi 7 octobre
 

---

## Devoir surveillé n° 2 - Mathématiques

Durée : 1 heure et 30 minutes

**CONSIGNES:** La rédaction est l'élément principal qui sera évalué : vous veillerez donc, si vous voulez avoir quelques points, à justifier soigneusement (ni trop ni trop peu) vos raisonnements. Vous prendrez également soin de rendre une copie propre, lisible et agréable à lire.

### Exercice I.

- Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $1 + 5 + 9 + \dots + (4n + 1) = (n + 1)(2n + 1)$
- On considère la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1 \quad \text{et} \quad x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$$

Il s'agit de déterminer *indépendamment* une expression explicite de  $x_n$  en fonction de  $n$  par deux méthodes différentes (on n'utilisera pas les résultats de l'une pour démontrer l'autre...)

**Première méthode** En raisonnant par *analyse-synthèse*, démontrer qu'il existe  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $x_n = a \times b^n + c^n$ .

**Seconde méthode** Démontrer par récurrence que  $x_n = 3^n - 2^n$

### Exercice II.

- Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Démontrer que  $x \times y \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$  et qu'il y a égalité si, et seulement si  $x = y$ .
- Soit  $(x, y) \in ]0, +\infty[^2$ . Démontrer que  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ .

### Exercice III.

Résoudre les équations et inéquations suivantes d'inconnue  $x$  :

- $|2x - 1| = |3 - x|$
- $\sqrt{x - 1} = \sqrt{2 - x}$
- $\frac{(x^2 - x - 2)}{2x + 1} > 0$
- $|2x - 5| \leq |x + 3|$

### Exercice IV.

Démontrer que la somme de deux entiers pairs est paire. Que pensez-vous de la réciproque ?

### Exercice V.

- Écrire une fonction `bac(note: float) -> int` qui prend un nombre à virgule flottante positif en argument et qui renvoie 0 si la moyenne entrée ne donne pas le Bac, 1 si le Bac est obtenu sans mention, 2 si la mention est « assez bien », 3 si la mention est « bien » et 4 si la mention est « très bien ».

2. Écrire en Python une fonction `cout_total(prix_au_kg: list, masse_voulue: list) -> float` qui prend en argument deux listes qui représentent respectivement les prix au kg de chaque ingrédient et les masses (en kg) de chacun de ces ingrédients (rangées dans le même ordre) nécessaires à la fabrication de crêpes aux huîtres, et qui renvoie le coût total.

**Exercice VI.**

Une partie  $A \subseteq \mathbb{N}$  est dite *potable* si elle vérifie la propriété suivante :

$$(\exists p \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq p \implies n \in A) \quad (\star)$$

1. Démontrer que  $A = \mathbb{N} \setminus \{42\}$  est une partie potable.
  2. Écrire la négation de  $(\star)$ .
  3. Démontrer que l'ensemble  $P = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$  n'est pas une partie potable.
  4. Démontrer qu'un élément  $A$  de  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  est potable si, et seulement si son complémentaire dans  $\mathbb{N}$  est de cardinal fini.
  5. Démontrer que si  $A_1$  et  $A_2$  sont des parties potables alors  $A_1 \cap A_2$  aussi.
-