interENS	Numéro d'inscription		Nom : Vader
	Numéro de table		Prénom : Darth
	Né(e) le		

Emplacement QR Code

Filière : BCPST

Session : 2023

49

Épreuve de : Mathématiques - DS n° 2

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

EXERCICE I /4

I-1. Soit n un entier naturel et P_n la proposition
« $1+5+9+\cdots+(4n+1) = (n+1)(2n+1)$ »

- $(0+1)\times(2\times 0+1) = 1$ et $4\times 0+1 = 1$
  donc P_0 est vraie

- Remarquons que $1+5+9+\cdots+(4\times(n+1)+1) = 1+5+\cdots+(4n+1)+(4(n+1)+1)$
  donc

$$P_n \Rightarrow 1+5+\cdots+(4n+1)+(4(n+1)+1) = (n+1)(2n+1) + 4(n+1)+1$$
$$P_n \Rightarrow \quad \_\_\_\_\_\_\_\_ = 2n^2+7n+6$$
$$P_n \Rightarrow \quad \_\_\_\_\_\_\_\_ = (2n+3)(n+2)$$
$$P_n \Rightarrow \underbrace{\quad \_\_\_\_\_\_\_\_ = (2(n+1)+1)((n+1)+1)}_{P_{n+1}}$$

- La proposition étant héréditaire et vraie pour $n=0$ on en déduit qu'elle est vraie pour tout entier naturel n d'après le principe de récurrence simple.

2 + 1

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

I-2 - Première méthode

* Analyse

Supposons l'existence du triplet (a,b,c)

Alors $(S):\begin{cases} x_0 = a\times b^0 + c^0 = a + 1 = 0 \\ x_1 = a\times b + c = 1 \\ x_2 = a\times b^2 + c^2 = 5x_1 - 6x_0 = 5 \end{cases}$

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = 1+b \\ -b^2 + (1+b)^2 = 5 \end{cases}$

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = 1+b \\ -b^2 + 1 + 2b + b^2 = 5 \end{cases}$

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$

donc si une solution existe, c'est $(-1,2,3)$

* Synthèse

vérifions que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $y_n = -2^n + 3^n$ est la suite (x_n)

$y_0 = -1+1 = 0 = x_0$

$y_1 = -2+3 = 1 = y_1$

et $y_{n+2} = 3^{n+2} - 2^{n+2}$

$5y_{n+1} - 6y_n = 5\times 3^{n+1} - 5\times 2^{n+1} + 6\times 2^n - 6\times 3^n$

$= 3^n(5\times 3 - 6) + 2^n(6 - 5\times 2)$

3

21

$$5y_{n+1} - 6y_n = 3^n \times 9 + 2^n \times (-4)$$
$$= 3^{n+2} - 2^{n+2}$$
$$= y_{n+2}$$

donc la solution proposée vérifie la condition de définition de (x_n)

* Conclusion l'unique suite cherchée vérifie

$$\underline{x_n = 3^n - 2^n}$$

Deuxième méthode

* Soit $n \in \mathbb{N}$ et P_n la proposition : $x_n = 3^n - 2^n$
* • $x_0 = 0 = 3^0 - 2^0$ donc P_0 est vraie
  • $x_1 = 1 = 3^1 - 2^1$ donc P_1 est vraie
* $P_n \wedge P_{n+1} \Rightarrow x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n = 5(3^{n+1} - 2^{n+1}) - 6(3^n - 2^n)$

$$\Rightarrow x_{n+2} = 3^n(5\times3-6) - 2^n(5\times2-6)$$
$$\Rightarrow x_{n+2} = 3^n \times 3^2 - 2^n \times 2^2$$
$$\Rightarrow P_{n+2}$$

* D'après le principe de récurrence à deux pas on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie

3

EXERCICE II

4

II.1- $x \times y \leq \frac{x^2+y^2}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{2} - xy \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2-2xy}{2} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0 \text{ ce qui est toujours vrai}$$

2

donc $\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}}$

+1 égalité

II.2 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{xy} \geq 2$ car $x \times y > 0$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy \geq 0 \text{ qui est toujours vrai}$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$$

2

EXERCICE III

/10

III-1 Soit (E_1) l'équation $|2x-1| = |3-x|$

Résumons la situation dans un tableau

valeurs de x	$-\infty$ $\quad$ $1/2$ $\quad$ 3 $\quad$ $+\infty$		
$\lvert 2x-1\rvert =$	$1-2x$ $\quad 0$	$2x-1$ $\quad 5$	$2x-1$
$\lvert 3-x\rvert =$	$3-x$ $\quad 5/2$	$3-x$ $\quad 0$	$x-3$
(E_1) :	$1-2x=3-x$	$2x-1=3-x$	$2x-1=x-3$

- Sur $]-\infty, 1/2]$ $(E_1) \Leftrightarrow x = -2$
- Sur $[1/2, 3]$ $(E_1) \Leftrightarrow x = 4/3$
- Sur $[3, +\infty[$ $(E_1) \Leftrightarrow x = -2$: impossible

$$\boxed{S_1 = \{-2, 4/3\}}$$

2

III-2 Soit (E_2) l'équation $\sqrt{x-1} = \sqrt{2-x}$

+1 En sol.

Elle est définie si et seulement si $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases}$ c.à.d $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 2 \end{cases}$

Résolvons (E_2) sur $[1,2]$

$(E_2) \Leftrightarrow x-1 = 2-x$, $x \in [1,2]$ car tous les nombres sont positifs

$(E_2) \Leftrightarrow 2x = 3$, $x \in [1,2]$

$(E_2) \Leftrightarrow x = 3/2$

$$\boxed{S_2 = \{3/2\}}$$

2

III-3 Tout d'abord

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= x^2 - 2 \times \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 2 \\ &= \left(x - 1/2\right)^2 - 9/4 \\ &= \left(x - 1/2 - 3/2\right)\left(x - 1/2 + 3/2\right) \\ &= (x-2)(x+1) \end{aligned}$$

3

Soit (I_3) l'inéquation $\dfrac{x^2 - x - 2}{2x+1} > 0$

$(I_3) \Leftrightarrow \dfrac{(x-2)(x+1)}{2x+1} > 0$

interENS

Numéro d'inscription

Numéro de table

Né(e) le

Nom :

Prénom :

Emplacement QR Code

Filière :

Session :

Épreuve de :

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Résumons la situation dans un tableau.

valeurs de x	$-\infty$		-1		$-1/2$		2		$+\infty$
signe de $x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $2x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\frac{(x^2-x-2)}{2x+1}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

On en déduit que $\boxed{S_3 =]-1, -1/2[\cup]2, +\infty[}$

III-4 Soit (I_4) l'inéquation $|2x-5| \leq |x+3|$

Résumons la situation dans un tableau

valeurs de x	$-\infty$		-3		$5/2$		$+\infty$
$\lvert 2x-5 \rvert =$		$5-2x$		$5-2x$	0	$2x-5$	
$\lvert x+3 \rvert =$		$-x-3$	0	$x+3$		$x+3$	
(I_3)		$5-2x \leq -x-3$		$5-2x \leq x+3$		$2x-5 \leq x+3$	

sur $]-\infty, -3]$: $(I_3) \Leftrightarrow 8 \leq x$: impossible

sur $[-3, 5/2]$: $(I_3) \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq x$ donc $(I_3) \Leftrightarrow x \in [2/3, 5/2]$

sur $[5/2, +\infty[$: $(I_3) \Leftrightarrow x \leq 8$ donc $(I_3) \Leftrightarrow x \in [5/2, 8]$

Finalement $\boxed{S_4 = [2/3, 8]}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

EXERCICE IV

- la proposition peut s'écrire formellement

$$\left((\exists k\in\mathbb{Z})(n=2k)\wedge(\exists k'\in\mathbb{Z})(n'=2k')\right)\Longrightarrow(\exists \ell\in\mathbb{Z})(n+n'=2$$

i.e. « Si n et n' sont pairs alors $n+n'$ est pair

En effet $n+n'=2k+2k'$ donc si n et n' sont pairs alors $n+n'$ est pair

$= 2(\underbrace{k+k'}_{\in\mathbb{Z}})$

- La réciproque est : si la somme de deux nombres est paire alors chacun est pair.

C'est faux car 7 et 5 sont impairs même si leur somme est paire

EXERCICE V

V-1

```
def bac(note: float) -> int:
    if note <10:
        return 0
    elif note <12:
        return 1
    elif note <14:
        return 2
    elif note <16:
        return 3
    else:
        return 4
```

V-2 def cout_total (prix_au_kg : liste, masse_voulue : list) →

```
    n = len ( prix_au_kg )
    p = 0
    for k in range(n) :
        p = p + prix_au_kg [k] * masse_voulue [k]
    return p
```

EXERCICE VI

VI-1 Tout nombre supérieur à 42 appartient à A donc (*) est vérifiée avec $p=42$
Ainsi A est une partie potable

VI-2 La négation de (*) est
$(\forall p \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})(n \geqslant p \text{ et } n \notin A)$

VI-3 P est l'ensemble des nombres pairs
- Si p est pair alors son successeur $p+1$ est impair et n'appartient pas à P
- Si p est impair, il n'appartient pas à P.

Ainsi, dans tous les cas, quelque soit l'entier p il existe un entier n qui lui est supérieur et qui n'appartient pas à P. P n'est donc pas potable

VI-4 Soit A une partie de $\mathbb{N}$
- Si A est potable alors la négation de (*) est vraie et $(\exists p \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \notin A \Rightarrow n < p)$

Or $n \notin A$ signifie que $n \in \complement_{\mathbb{N}} A$
Cela signifie donc que $n \in \complement_{\mathbb{N}} A \Rightarrow n \in \{0, 1, \dots, p-1\}$
donc $\complement_{\mathbb{N}} A$ est de cardinal inférieur à p

71

Si $C_{\mathbb{N}}A$ est de cardinal fini

Alors il existe un nombre fini d'éléments qui ne sont pas dans A. Soit p le plus grand d'entre eux. Alors tous les éléments de $\mathbb{N}$ supérieurs à p+1 seront dans A
donc A est potable

- Nous avons donc démontré par double inclusion que A est potable $\iff$ $C_{\mathbb{N}}A$ est de cardinal fini.

VI 5. • A_1 étant potable, il existe un entier p_1 tel que $n \geq p_1 \Rightarrow n \in A_1$

• De même, il existe un entier p_2 tel que

$$n \geq p_2 \Rightarrow n \in A_2$$

Ainsi, notons $p = \max(p_1, p_2)$

alors $n \geq p \Rightarrow n \geq p_1$ donc $n \geq p \Rightarrow n \in A_1$

de même $n \geq p \Rightarrow n \geq p_2$ donc $n \geq p \Rightarrow n \in A_2$

On en déduit que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists p \in \mathbb{N})\ (n \geq p \Rightarrow n \in A_1 \wedge n \in A_2)$$

Soit $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists p \in \mathbb{N})\ (n \geq p \Rightarrow n \in A_1 \cap A_2)$

ainsi $A_1 \cap A_2$ est aussi potable