

Numéro d'inscription

interENS

Numéro de table

Nom : Hwa

Prénom : Ben

Né(e) le

Emplacement QR Code

Filière : BCST

Session : DS 3

Épreuve de : Mathématiques

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

EXERCICE I : y DS 2

EXERCICE II

$$\begin{aligned}
 1. (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} &= e^{\sqrt{2} \ln(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})} \\
 &= e^{\sqrt{2} \times \sqrt{2} \ln(\sqrt{2})} \\
 &= e^{2 \cdot \ln(2^{1/2})} \\
 &= e^{2 \times \frac{1}{2} \ln(2)} \\
 &= e^{\ln(2)} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$

2. Soit (E) l'équation $2i\bar{z} - (2+i)z = 4$

Posez $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Alors (E) $\Leftrightarrow 2i(x - iy) - (2+i)(x + iy) = 4$

(E) $\Leftrightarrow 2ix + 2y - 2x - 2iy - ix + y = 4$

(E) $\Leftrightarrow (3y - 2x) + i(x - 2y) = 4$

(E) $\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y = 0 \\ x - 2y = 4 \end{cases} \quad (E) \Leftrightarrow \begin{cases} -4y - 8 + 3y = 0 \\ x = 2y + 4 \end{cases}$

(E) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = -8 \\ x = -12 \end{cases}$

(E) $\Leftrightarrow z = -12 - 8i$

$$\text{II-3} \quad z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } z^{2023} &= e^{-i\pi \frac{2023}{3}} = e^{-\left(\frac{674 \times 3 + 1}{3}\right)i\pi} \\ &= e^{-374 \times 2\pi i} \times e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ &= 1 \times e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ &= z \end{aligned}$$

$$\text{donc } \boxed{z^{2023} = z}$$

EXERCICE III

1. 2. 3 : cf DS2

III-4 Soit (E) l'équation $\sin^2(x) + 3\cos(x) - 1 = 0$

$$(E) \Leftrightarrow (1 - \cos^2(x)) + 3\cos(x) - 1 = 0$$

$$(E) \Leftrightarrow -\cos^2(x) + 3\cos(x) = 0$$

$$(E) \Leftrightarrow \cos(x) (3 - \cos(x)) = 0$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x) = 0 \\ \cos(x) = 3 \end{cases} \text{ : impossible car } \forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) \leq 1$$

$$(E) \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$



III-4 Soit (F) l'équation $\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) = 1$

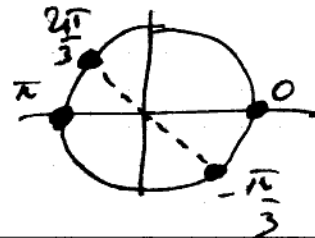
$$(F) \Leftrightarrow 2 \left(\frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(2x) \right) = 1$$

$$(F) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos(2x) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin(2x) = \frac{1}{2}$$

$$(F) \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$(F) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(F) \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Numéro d'inscription

interENS

Numéro de table

Nom : _____

Prénom : _____

Né(e) le

Emplacement
QR Code

Filière :

Session :

Épreuve de :

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

EXERCICE IV

IV-1 Soit (E_1) l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$
Résolvons (E_1) dans \mathbb{C} en calculant son discriminant

$$\delta^2 = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$$

$$\text{dmc } (E_1) \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{2 - 4i}{2} \\ z_2 = \frac{2 + 4i}{2} \end{cases}$$

$$(E_1) \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - 2i \\ z = 1 + 2i \end{cases}$$

IV-2 Soit (E_2) l'équation $\bar{z}^2 - \bar{z} + 2 = 0$

$\forall z \in \mathbb{C} \quad (z = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = 0)$

$$\text{dmc } (E_2) \Leftrightarrow \overline{z^2 - z + 2} = 0$$

$$(E_2) \Leftrightarrow z^2 - z + 2 = 0$$

Calculons le discriminant

$$\delta^2 = 1 - 8 = -7 = (i\sqrt{7})^2$$

$$\text{dmc } (E_2) \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1 - i\sqrt{7}}{2} \\ z_2 = \frac{1 + i\sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

(NB nous savons que les solutions complexes sont conjuguées ce qui confirme encore le fait que l'équation avec les conjugués est équivalente à celle sans)

$$\underline{\text{IV-3}} \quad (3-2i)^2 = 9 - 12i - 4 = 5 - 12i$$

Soit (E_3) l'équation $z^2 + z - 1 + 3i = 0$

Calculons son discriminant

$$\delta^2 = 1 - 4(-1 + 3i) = 5 - 12i = (3 - 2i)^2$$

$$\text{donc } (E_3) \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{-1 - (3 - 2i)}{2} = \frac{-2 + i}{2} \\ z = \frac{-1 + (3 - 2i)}{2} = \frac{1 - i}{2} \end{cases}$$

VI cf DS 1

EXERCICE VI

VI-1 cf cours

VI-2 z est un antécédent de 1 si et seulement si $f(z) = 1$

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z+1}{\bar{z}-1} = 1$$

$$\Leftrightarrow z+1 = \bar{z}-1$$

$$\Leftrightarrow z - \bar{z} = -2$$

$$\Leftrightarrow 2i \operatorname{Im}(z) = -2 \quad \text{ce qui est impossible}$$

donc 1 n'admet pas d'antécédent par f
de même pour -1.

$$f(z) = -1 \Leftrightarrow \frac{z+1}{\bar{z}-1} = -1$$

$$\Leftrightarrow z+1 = -\bar{z}+1$$

$$\Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \operatorname{Re}(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$$

Tous les imaginaires purs ont pour image -1

Numéro d'inscription

interENS

Numéro de table

Nom : _____

Prénom : _____

Né(e) le

Emplacement
QR Code

Filière :

Session :

Épreuve de :

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numérotter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

VII-3

- Comme par exemple i et $2i$ ont tous les deux pour image -1 , f n'est pas injective
- Comme 1 n'admet pas d'antécédent par f , f n'est pas surjective
- N'étant ni injective, ni surjective, elle n'est pas bijective.

VIII - 1 cf DS 2 2- cf cours

3

Fabricons d'abord un compteur de négatifs :

```
def compte_negs (xs: list) -> int:
```

```
    cpt = 0
```

```
    for x in xs:
```

```
        if x <= 0:
```

```
            cpt = cpt + 1
```

```
    return cpt
```

NB : un "hack" pythonique :

```
def compte_negs (xs):
```

```
    return sum([x <= 0 for x in xs])
```

5/6

Il ne reste plus qu'à faire :

def minmin (xs : list, ys : list) → list :

cx = compte_negs (xs)

cy = compte_negs (ys)

if cx ≤ cy :

return cx

else :
return cy

EXERCICE IX : cf EOS 2