Externat Des Enfants Nantais

BCPST$_1$ 2 décembre 2023

Devoir surveillé n° 4 - Mathématiques

Durée : 3 heures

CONSIGNES: *La rédaction et la présentation interviennent pour une part très importante dans la note; il est recommandé de les soigner. Les exercices sont indépendants. Les calculatrices sont proscrites.*

Exercice I. (*Questions rapides*)

1. Déterminez une fonction Python qui prend une liste de nombres en argument et renvoie un couple contenant l'indice de la première occurence du maximum et sa valeur.
2. Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.
3. Relation de Pascal : démonstration par le calcul.
4. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} t\sin(t)dt$
5. Soit $f(x,y) = e^{-\sqrt{x^2+(y+1)^4}}$. Calculer les dérivées partielles de f.
6. Soit $z = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)^3}$. Donner sa forme exponentielle puis déterminer sa forme algébrique.
7. Soit $z = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Calculer z^2, puis déterminer module et argument de z.
8. On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Montrer que $j^3 = 1$, $\bar{j} = j^2$ et $1+j+j^2 = 0$.
9. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = (x+1)\mathbf{e}^x$$
On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
   - **a.** Déterminez une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
   - **b.** Déterminer les instructions en Python nécessaires pour tracer $\mathcal{C}$ ainsi que la tangente précédente à l'écran.

Exercice II. (*Étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2)*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}\min(u_n, 1)$$

où $\min(u_n, 1)$ désigne le plus petit des deux nombres u_n et 1.

1. *Approche informatique*

a. Rédiger une fonction `calcul_un` en Python qui prend en argument un entier n et deux flottants `u0` et `u1` désignant u_0 et u_1 et qui renvoie la valeur de u_n.

b. Rédiger une fonction `calcul_liste` en Python qui prend en argument un entier n et deux flottants `u0` et `u1` désignant u_0 et u_1 et qui renvoie la liste des valeurs u_k pour $k \in 0, n$.

2. Dans cette partie on suppose que $u_0 = \dfrac{1}{4}$ et que $u_1 = \dfrac{1}{2}$.

a. Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5.

b. Démontrer par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 1$.

c. Démontrer alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = \dfrac{1}{4}$, $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \dfrac{1}{2}u_{n+1} + \dfrac{1}{2}u_n$.

d. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

3. Dans cette partie on suppose que $u_0 = 1$ et que $u_1 = 2$.

a. Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5.

b. Que peut-on conjecturer sur u_n ? Démontrer votre conjecture.

c. En déduire que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $u_{p+1} = \dfrac{1}{2}u_p + \dfrac{1}{2}$.

d. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice III. (*Étude d'une suite arithmético-géométrique)*
Soit la suite $(u_n)n \in \mathbb{N}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = -2u_n + \dfrac{n^2+4n+2}{n(n+1)} \end{cases}$$

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n^2+4n+2}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + c$$

2. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$ est arithmético-géométrique.

3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de l'entier naturel non nul n.

Exercice IV. (*Calculs de dérivées et primitives*)

1. Exprimer la dérivée de $f(x) = x^{\tan x}$ (on ne se préoccupera pas de domaines de définition).

2. Soit la fonction $f : t \to \dfrac{\sin t}{1 + \cos t}$

a. Déterminer l'ensemble de définition de f

b. Déterminer une primitive de f sur l'un des intervalles où elle est définie.

c. Déterminer la dérivée de f sur l'un des intervalles où elle est définie.

3. Soit la fonction $g : x \to x2^{x^2}$

a. Déterminer l'ensemble de définition de g.

b. Déterminer la dérivée de g sur son ensemble de définition.

c. Déterminer une primitive de g sur son ensemble de définition.

4. Soit la fonction $h : x \to x \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

a. Déterminer l'ensemble de définition de h.

b. Démontrer que $\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ \dfrac{x}{x+1} = A + \dfrac{B}{x+1}$

c. Déterminer, à l'aide d'une primitivation par parties, une primitive de h sur son ensemble de définition.

5. Soit la fonction $u : x \to \ln(x^2)$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de u.

b. Étudier la parité de u.

c. Déterminer une primitive de u sur son ensemble de définition.