

# EXTERNAT DES ENFANTS NANTAIS

## Devoir surveillé n° 6 - Mathématiques

### BCPST I

10 février 2024

Durée : 3 heures

*La rédaction et la présentation interviennent pour une part très importante dans la note ; il est recommandé de les soigner. Les exercices sont indépendants. Les calculatrices sont interdites.*

#### Exercice I

On considère la matrice  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$  et on pose  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  une matrice colonne d'inconnues. Résoudre le système linéaire  $AX = \lambda X$  en fonction des valeurs du paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

#### Exercice II

On considère la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{x^3 + x + 2}$ .

1. Étudier la fonction  $g : x \mapsto x^3 + x + 2$  et en déduire que  $f$  admet des primitives sur  $] -1, +\infty[$ .
2. À l'aide d'un système linéaire, trouver trois constantes  $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3$  telles que :

$$\forall x > -1, \quad f(x) = \mu_1 \left( \frac{1}{x+1} \right) + \mu_2 \left( \frac{2x-1}{x^2-x+2} \right) + \mu_3 \left( \frac{1}{x^2-x+2} \right).$$

3. Déterminer les primitives des fonctions  $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x+1}$  et  $f_2 : x \mapsto \frac{2x-1}{x^2-x+2}$  sur  $] -1, +\infty[$ .
4. Pour cette question, on fixe un réel  $x > -1$ .
  - a. Écrire l'expression  $x^2-x+2$  sous la forme  $\gamma((\alpha x + \beta)^2 + 1)$  où  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$  sont trois constantes à déterminer.
  - b. Calculer l'intégrale  $\int_0^x \frac{dt}{t^2 - t + 2}$  à l'aide du changement de variable  $s = \alpha t + \beta$ .
5. Déduire des résultats précédents la forme des primitives de  $f$  sur  $] -1, +\infty[$ .

#### Exercice III

On considère la matrice  $M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ .

1. Calculer  $M^2$  et  $M^3$ .
2. À l'aide d'un système linéaire, trouver trois constantes  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  telles que  $P(M) = 0_3$  où  $P$  est la fonction polynomiale  $P : x \mapsto x^3 + ax^2 + bx + c$ .
3. En déduire que  $M$  est inversible et calculer son inverse.

### Exercice IV

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$ .

**1.** Calculer  $I_0$  et  $I_1$ .

**2.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre  $I_{n+1}$  et  $I_n$ .

**3.** En déduire que  $I_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .