

NOM:



EXTERNAT-CHAVAGNES

BCPST-1 12 septembre 2023

Test de rentrée - Mathématiques

Durée : 1 heure

CONSIGNES: Répondez directement sur le sujet en détaillant vos calculs

Exercice I.

Développer et réduire les expressions suivantes :

1. $A = (e^x - 1)(e^x + 1) =$

2. $B = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) =$

Exercice II.

Mettre au même dénominateur, a et b étant des réels :

1. $A = 2 - \frac{x-1}{x+1} =$

2. $B = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-1} =$

3. $C = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{e^x + 1} =$

4. $D = ax + b + \frac{1}{x-1} =$

Exercice III.

Déterminer des réels a et b tels que, pour toutes valeurs de x que l'on précisera, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{a}{x + 2} + \frac{b}{x - 2}$$

Exercice IV.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $a = 2^n$. Exprimez uniquement en fonction de a (sans utiliser n) les expressions :

1. $A = 2^{n+3} =$

2. $B = 2^{-2n} =$

3. $C = \frac{4^{n-2}}{2^{1-3n}} =$

4. $D = 8^{2n} =$

5. $E = 2^{n+3} - 2^{2n} + 5 \times 2^{n+1} =$

Exercice V.

x , y et z étant des nombres réels, développez :

1. $(x + y)^2 - (x - y)^2 =$

2. $(x + y + z)^2 =$

3. $(x - y)^3 =$

4. $(3 - 2\sqrt{3})^3 =$

Exercice VI.

Soit f la fonction f définie par $f : x \mapsto x^2 \ln x$.

1. Quel est le domaine de définition de son expression ?

2. Calculez

a. $f(e)$

b. $f\left(\frac{1}{e}\right)$

c. $f(\sqrt{e})$

d. $f(e^2)$

e. $f(e\sqrt{e})$

f. $f\left(\frac{1}{e^2}\right)$

g. $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

3. 0 possède-t-il des antécédents par f ?

Exercice VII.

Soient $f :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ et $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \sqrt{x} \ln(x)$

1. Donner une expression la plus simple possible de la composée $g \circ f$ de ces deux fonctions.
2. Donner une expression la plus simple possible du produit $g \times f$ de ces deux fonctions.
3. Comparer ces deux expressions.

Exercice VIII.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$.

Déterminer l'ensemble image par f de l'intervalle $[-2, 1]$.

Exercice IX.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x - [x]$.

1. a. Quelle est l'image de 0 ?
 - b. de 1 ?
 - c. de $\frac{27}{2}$?
 - d. de \mathbb{R} ?
2. Quel sont les antécédents
 - a. de 0 ?
 - b. de 1 ?
 - c. de 28 ?

BROUILLON